Aufgabe 1)

Mit Hilfe des Satzes von Vièta erhalten wir 3 Gleichungen:

(1) $-a^2b^2 = -ab \Leftrightarrow ab(ab-1) = 0$
(2) $ab + a^2b + ab^2 = b \Leftrightarrow ab(1+a+b) = b$
(3) $-a - b - ab = -a \Leftrightarrow b(a+1) = 0$

Betrachtet man (1), so erkennt man, dass ab entweder 1 oder 0 sein kann.

Fall 1) $ab = 0$

a) $a = 0$, durch (2)und (3) muss auch $b = 0$ sein.
b) $b = 0$, durch (2)und (3) kann a jede reelle Zahl sein.

(a, b) kann ist also (a, 0), wobei a eine reelle Zahl ist.

Setzt man 0 für b ein erhält man die Gleichung: $x^3 + ax^2 = 0$, die drei reelle Lösungen (-a, 0, 0) hat.

Fall 2) $ab = 1$

Weder a noch b dürfen Null sein. Da bei (3) $a + 1 = 0$ gelten muss, ist $a = -1$. Daher muss $b = -1$ sein, also erhalten wir für (a, b) = (-1, -1)

Hier lautet die Gleichung: $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$, mit den Lösungen (-1, -1, 1).

Es gibt also für (a, b) folgende zwei Möglichkeiten: (a, 0) und (-1, -1)

Aufgabe 3)

Sei die Bezeichnung für den zufällig gewählten Punkt auf *AB* *P*.

Eine zu *BC* parallele Gerade durch *P* schneidet die Strecke *AC* im Punkt *E*. Eine andere Parallele zu *AC* durch *P* schneidet die Strecke *BC* im Punkt *F*.

Das Dreieck *ΔADE* ist daher ähnlich zum Dreieck *ΔABC*, sowie *ΔBDF* ähnlich zu *ΔBAC* ist.

Da v und h_a beide normal auf *BC* (und auf *DE*) stehen und daher parallel sind, ist der Normalabstand von *A* auf *DE* gleich $h_a - v$. Analog gilt für den Abstand von *B* auf *DF*, dass die Länge $h_b - u$ ist.

Fall 1) $h_a \geq h_b$ -> $\min(h_a, h_b) = h_b$, $\max(h_a, h_b) = h_a$ oder $\min(h_a, h_b) = \max(h_a, h_b) = h_a = h_b$

Das Verhältnis der Höhen von *ΔABC* gilt auch für die ähnlichen Dreiecke *ΔADE* und *ΔBDF*, also

(4) $h_a - v \geq u$
(5) $v \geq h_b - u$

Fall 2) $h_b > h_a$ -> $\min(h_a, h_b) = h_a$, $\max(h_a, h_b) = h_b$ oder $\min(h_a, h_b) = \max(h_a, h_b) = h_a = h_b$

Wie oben gilt das Verhältnis auch für *ΔADE* und *ΔBDF*, also

(6) $u \geq h_a - v$
(7) $h_b - u \geq v$

ad 1) $u \leq h_a - v \Leftrightarrow u + v \leq h_a$

$v \geq h_b - u \Leftrightarrow v + u \geq h_b$

c) $h_b \leq u + v \leq h_a \Leftrightarrow \min(h_a, h_b) \leq u + v \leq \max(h_a, h_b)$

ad 2) $u \geq h_a - v \Leftrightarrow u + v \geq h_a$

$v \leq h_b - u \Leftrightarrow v + u \leq h_b$

d) $h_a \leq u + v \leq h_b \Leftrightarrow \min(h_a, h_b) \leq u + v \leq \max(h_a, h_b)$

Aufgabe 4)

$$k^2l^2 - m^2n^2 = 2015 + l^2m^2 - k^2n^2$$

$$k^2l^2 - m^2n^2 - l^2m^2 + k^2n^2 = 2015$$

$$(k^2 - m^2) * (n^2 + l^2) = 2015$$

Es gibt 4 Möglichkeiten, wie man 2015 als Produkt aufschreiben kann:

$$1 * 2015,5 * 403,13 * 155,31 * 65$$

Die erste Möglichkeit $(1 * 2015)$ kann man sofort ausschließen, da 1 weder als Summe, noch als Differenz zweier Quadratzahlen gebildet werden kann. Für $(k^2 - m^2)$ bzw. $(n^2 + l^2)$ gibt es also nur noch sechs mögliche Werte.

Tatsächlich kann man von diesen sechs nur drei als Summe darstellen, eine davon auf zwei verschiedene Arten.

$(n \vee l)$ kann also $(1|2), (2|3), (1|8)$ oder $(4 \vee 7)$ sein, wobei n und l vertauscht werden können, das ändert allerdings nichts an der Summe von k, l, m und n.

Da $(n^2 + l^2)$ nun entweder 5, 13 oder 65 ist, muss $(k^2 - m^2)$ die Werte 403, 155 0der 31 haben.

$$(k^2 - m^2) = (k - m) * (k + m)$$

$(k - m) * (k + m) = 31 = 1 * 31$ => $k = 16, m = 15$

$(k - m) * (k + m) = 155 = 1 * 155 = 5 * 31$ => $k = 78, m = 77; k = 18, m = 13$

$(k - m) * (k + m) = 403 = 13 * 31 = 1 * 403$ => $k = 202, m = 201; k = 22, m = 9$

$$k + l + m + n = \{34,36,40,42,160,406\}$$