DUELL 2015 - Lösungen der Einzelbewerbsaufgaben der Kategorie B

Konstantin Andritsch

16. Januar 2016, Graz

Aufgabe 1

Aufgabenstellung

Wie viele Tripel (a, b, c) von positiven ganzen Zahlen, mit

$$abc = 45000$$

existieren?

Lösung

Die Zahl 45000 kann man schreiben als

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4$$

Die positiven ganzzahligen Lösungen müssen also in der Form:

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} * 5^{\beta_1} b = \quad 2^{\alpha_2} * 3^{\beta_2} * 5^{\beta_2} c = 2^{\alpha_3} * 3^{\beta_3} * 5^{\beta_3}$$

wobei α_i, β_i, γ_i, $i = 1, 2, 3$ nicht-negative ganze Zahlen sind, die folgendes Gleichungssystem lösen:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 2$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 4$$

Die erste Gleichung ist durch die Tripel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$:
(3,0,0); (0,3,0); (0,0,3); (2,1,0); (1,2,0);
(2,0,1); (1,0,2); (0,1,2); (0,2,1); (1,1,1) erfüllt, das sind 10 Tripel.
Die zweite Gleichung ist durch die Tripel $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$:

((2,0,0);(0,2,0);(0,0,2);(1,1,0);(1,0,1);(0,1,1)) erfüllt, das sind 6 Tripel.
Die dritte Gleichung ist durch die Tripel $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$:
((4,0,0);(0,4,0);(0,0,4);(3,1,0);(1,3,0);(3,0,1);(1,0,3);(0,1,3);(0,3,1);(2,2,0);
(0,2,2);(2,0,2);(2,1,1);(1,2,1);(1,1,2)) erfüllt, das sind 15 Tripel.
Die Anzahl an Tripel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)(\beta_1, \beta_2, \beta_3)(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3,)$ die die drei Gleichungen erfüllen ist 10*6*15 = 900. Wenn wir diese Tripel in 3 aufeinanderfolgende 3x3 Tabellen schreiben, dann führt das zu 900 verschiedenen Tabellen. Da solche 900 Tabellen existieren, existieren auch 900 verschiedene Möglichkeiten für das Tripel (a,b,c). Somit ist die Lösung 900.

Aufgabe 2

Aufgabenstellung

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit rechtem Winkel im Punkt C. Des Weiteren seien ACP und BCQ zwei rechtwinkelige gleichschenkelige Dreiecke außerhalb von ABC mit rechtem Winkel in P bzw. Q. F ist die Höhe von C auf AB und D,E sind die Schnittpunkte der Strecken FP und FQ mit den Strecken AC bzw. BC. Zu zeigen ist |DC|=|EC|.

Lösung

$\angle APC = 90°$ und $\angle CFA = 90° \implies APCF$ ist ein Sehnenviereck $\angle CAP = 45°$ (da APC gleichschenkelig ist) Da APCF ein Sehnenviereck ist, gilt, dass $\angle CFP = \angle CAP = 45°$ $\angle BQC = 90°$ und $\angle CFB = 90° \implies BQCF$ ist ein Sehnenviereck $\angle CBQ = 45°$ (da BQC gleichschenkelig ist) Da BQCF ein Sehnenviereck ist, gilt, dass $\angle CFQ = \angle CBQ = 45° \implies \angle PFQ = \angle PFC + \angle CFQ = 45° + 45° = 90°$ $\angle DCE = 90°$ und $\angle DFE = 90° \implies DFEC$ ist ein Sehnenviereck $\implies \angle CDE = \angle CFE = 45°$ und $\angle CED = \angle CFD = 45°$ Somit ist $\angle CED = \angle CDE = 45°$, also ist das Dreieck CDE gleichschenkelig mit der Basis $DE \implies |CD| = |CE|$

Aufgabe 3

Aufgabenstellung

Seien p, q, r, s nicht-negative reelle Zahlen mit

$$p \leq q \leq r \leq s$$

Beweise die Ungleichung:

$$\frac{p+q+r+s}{4} \geq \frac{p+q+r}{3} \tag{1}$$

Wann gilt Gleichheit?

Lösung

Zuallererst multiplizieren wir beide Seiten aus. Stehen bleibt:

$$3p + 3q + 3r + 3s \geq 4p + 4q + 4r$$

Jetzt subtrahieren wir von beiden Seiten $3p, 3q$ und $3r$. Es folgt:

$$3s \geq p + q + r$$

$$\Leftrightarrow s + s + s \geq p + q + r$$

Da laut Angabe gilt, dass

$$s \geq r \geq q \geq p$$

ist jedes s auf der linken Seite größer als einer der Summanden auf der rechten Seite, und somit ist diese Ungleichung bewiesen. Gleichheit gilt nur für den Fall $s = r = q = p$, da sonst die linke Seite der Gleichung sicher größer wäre als die rechte..

Aufgabe 4

Aufgabenstellung

ABCD ist ein tangenten Viereck mit rechtem Winkel in B und in D. Beweise das ABCD ein Deltoid ist.

Lösung

Da ABCD ein tangenten Viereck mit rechtem Winkel in B und D mit $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |CA| = d$ ist, gelten die zwei folgenden Gleichungen

$$(1) : a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

$$(2) : a + c = b + d$$

Wir könne die zweite Gleichung umschreiben in:

$$a - b = d - c$$

Nun quadrieren wir diese Gleichung und erhalten nach Verwendung der ersten Gleichung

$$(3) : 2ab = 2cd$$

Durch Zusammenfassung von (1) und (3) erhalten wir $a + b = c + d$. Laut (2) gilt aber $a + c = b + d$. Daraus folgt $(a = d)$ und $(b = c)$ Das hat zur Folge das ABCD ein Deltoid ist.