DUELL 2015 - Lösungen der Teambewerbsaufgaben der Kategorie A

Benedikt Andritsch

22. März 2015, Graz

Aufgabe 1

Aufgabenstellung

Bestimme alle Paare (x, y) ganzer Zahlen, für die gilt:

$$x^2 - 3x - 4xy - 2y + 4y^2 + 4 = 0$$

Lösung

$x^2-3x-4xy-2y+4y^2+4 = 0 \iff x^2-4xy+4y^2 = 3x+2y-4 \iff (x-2y)^2 = 3x+2y-4$

Da $x, y \in \mathbb{Z}$ existiert eine ganze Zahl d, sodass:

$$d = x - 2y,\ d^2 = 3x + 2y - 4$$

Als Lösungen für x und y erhalten wir:

$$x = \frac{d(d+1)}{4} + 1, y = \frac{d(d-3)+4}{8}$$

Da $x, y \in \mathbb{Z}$, gilt

$$d(d-3) + 4 \equiv 0\, mod\, 8 \tag{1}$$

$$d(d+1) \equiv 0\, mod\, 4 \tag{2}$$

Aus den quadratischen Resten $mod4$ (0 und 1) und Gleichung (2) folgt

$$d \equiv 0\, mod\, 4 \vee d \equiv -1\, mod\, 4$$

Aus den quadratischen Resten $mod8$ (0, 1 und 4) und Gleichung (1) folgt

$$d \equiv 4\, mod\, 8 \vee d \equiv -1\, mod\, 8$$

Daher kann man d folgendermaßen anschreiben:

$$d = 8k + 4 \vee d = 8k - 1,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Es ergeben sich also 2 Fälle:

1.Fall: $d = 8k + 4$

$$x = \frac{64k^2 + 72k + 24}{4} + 1 = 16k^2 + 18k + 6$$

$$y = \frac{64d^2 + 40k + 8}{8} = 8k^2 + 5k + 1$$

2.Fall: $d = 8k - 1$

$$x = \frac{64k^2 - 8k + 4}{4} + 1 = 16k^2 - 2k + 1$$

$$y = \frac{64d^2 - 40k + 8}{8} = 8k^2 - 5k + 1$$

Daraus ergibt sich:

$$\mathbb{L} = \{x, y \in \mathbb{Z} | (x = \frac{64k^2 + 72k + 24}{4} + 1 = 16k^2 + 18k + 6 \wedge y = \frac{64d^2 + 40k + 8}{8} = 8k^2 + 5k + 1) \vee (x = \frac{64k^2 - 8k + 4}{4} + 1 = 16k^2 - 2k + 1 \wedge y = \frac{64d^2 - 40k + 8}{8} = 8k^2 - 5k + 1), \forall k \in \mathbb{Z}\} \tag{3}$$

Aufgabe 2

Aufgabenstellung

Gegeben ist ein Dreieck ABC in der Ebene. Beweise, dass für jedes Tripel u, v, w positiver reeller Zahlen ein Punkt P im Dreieck existiert, sodass:

$$S_{ABP} : S_{BCP} : S_{CAP} = u : v : w$$

[Bemerkung: S_{XYZ} steht für die Fläche des Dreiecks XYZ.]

Lösung

Wir definieren die Fläche des Dreiecks ABC als 1, die Einheit ist egal. Somit ist

$$S_{ABP} + S_{BCP} + S_{CAP} = S_{ABC} = 1.$$

Das Verhältnis $u : v : w$ kürzen wir durch $u + v + w$ und erhalten

$$u : v : w = r : s : t$$

mit

$$r = \frac{u}{u + v + w}, s = \frac{v}{u + v + w} \text{ und } t = \frac{w}{u + v + w}$$

dabei gilt

$$r + s + t = 1$$

Nun setzen wir $S_{ABP} = r$ und erhalten eine fixe Höhe h des Dreiecks ABP mit

$$h = \frac{2r}{AB}.$$

Da $r + s + t = 1 \implies r \leq 1$, ist $h \leq \frac{2}{AB}$.

Für die Höhe h_{ABC} des Dreiecks ABC gilt:

$$h_{ABC} = \frac{1}{\frac{AB}{2}}$$

Also ist

$$h \leq h_{ABC}.$$

Damit gibt es sicher einen Punkt P mit dem Abstand h zur Seite AB der innerhalb des Dreiecks ABC liegt.

Der Punkt P ist jetzt beliebig auf der Parallelen l zu AB im Abstand von h innerhalb des Dreiecks ABC verschiebbar. Die Fläche des Dreiecks ABP ist bei jedem Punkt auf l gleich r. Für die Summe der restlichen beiden Dreiecke BCP und CAP gilt:

$$S_{BCP} + S_{CAP} = S_{ABC} - S_{ABP} = 1 - r = s + t.$$

Da man P beliebig auf l verschieben kann, gibt es zwischen $P \in AC$, wo $S_{CAP} = 0$ und $P \in BC$, wo $S_{CAP} = s + t$ einen Punkt P, wo $S_{CAP} = t$. In diesem Fall ist $S_{BCP} = s + t - S_{CAP} = s + t - t = s$. Es gelten also:

$$S_{ABP} = r, S_{BCP} = s \,\text{und}\, S_{CAP} = t$$

also:

$$S_{ABP} : S_{BCP} : S_{CAP} = r : s : t = u : v : w \,\square$$

Aufgabe 3

Aufgabenstellung

Wie in der Figur gezeigt, ist ein Kreis von 6 berührenden Kreisen der gleichen Größe umgeben.

Jeweils eine der Zahlen a, b, c, d, e, f und m steht in den Kreisen. Man weiß, dass jede dieser Zahlen gleich dem Produkt der Zahlen in angrenzenden Kreisen ist. Bestimme alle möglichen Werte für m und beweise, dass kein anderer Wert möglich ist.

Lösung

1.Fall: $m = 0$

In diesem Fall existiert eine Lösung: $a = b = c = d = e = f = m = 0$. Im Weiteren können wir von $m \neq 0$ ausgehen, und daher auch $a, b, c, d, e, f \neq 0$, da wenn eine Zahl 0 ist alle angrenzenden Zahlen 0 wären, dann also alle 0 wären.

2.Fall: $a, b, c, d, e, f, m \neq 0$

$$abcdef = m$$

$$a = mfb, b = mac, c = mbd, d = mce, e = mdf, f = mea$$

$$\implies abcdef = m = m^6a^2b^2c^2d^2e^2f^2 \iff 1 = m^5a^2b^2c^2d^2e^2f^2$$

Im Folgenden wird e durch mdf ersetzt.

$$f = mea = m^2dfa \iff 1 = m^2da$$

Im Folgenden werden der Reihe nach $d, c, b, d, e^2, c^2, d^2$ durch obenstehende Beziehungen ersetzt:

$$1 = m^2da = m^3cea = m^4bdea = m^5a^2cde = m^6a^2c^2e^2 = m^8a^2c^2d^2f^2 = m^10a^2b^2d^4f^2 = m^{12}a^2b^2c^2d^2e^2f^2$$

$$\implies m^{12}a^2b^2c^2d^2e^2f^2 = m^5a^2b^2c^2d^2e^2f^2 \iff m^{12} = m^5 \iff m^7 = 1 \iff m = 1$$

Es können außer $m = 0$ also nur mehr Lösungen mit $m = 1$ existieren. Eine mögliche Lösung mit $m = 1$ ist $a = b = c = d = e = f = m = 1$. $m = 1$ ist also ein mögliches m.

Aus beiden Fällen folgt die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{0; 1\}$$