Teambewerb der Kategorie B

1.) Angabe:

Bestimme alle 5-tupel (a,b,c,d,e) aus den positiven ganzen Zahlen, sodass jeder dieser Brüche
A:$(a+b)/(c+d)$ B:$(b+c)/(d+e)$ C:$(c+d)/(e+a)$
D:$(d+e)/(a+b)$ E:$(e+a)/(b+c)$ eine ganze Zahl beschreibt.

Lösung:

Soll wirklich jeder dieser Brüche ganzzahlig sein, so muss
1. laut Bruch A $a+b \geq c+d$,
2. laut Bruch B $b+c \geq d+e$,
3. laut Bruch C $c+d \geq e+a$,
4. laut Bruch D $d+e \geq a+b$ und
5. laut Bruch E $e+a \geq b+c$ gelten.

Addiert man nun alle Ungleichungen (1.-5.) erhält man:
$2(a+b+c+d+e) \geq 2(a+b+c+d+e)$.

Daraus folgt, dass Gleichheit gelten muss!

1. $a+b=c+d$
2. $b+c=d+e$
3. $c+d=e+a$
4. $d+e=a+b$
5. $e+a=b+c$

a) Aus 1. und 3. erhält man: $a+b=c+d=e+a \Rightarrow a+b=e+a \Rightarrow b=e$
b) Aus 1. und 4. erhält man: $c+d=a+b=d+e \Rightarrow c+d=d+e \Rightarrow c=e$,
durch a) $\Rightarrow b=c=e$
c) Aus 3. und 5. erhält man: $c+d=e+a=b+c \Rightarrow c+d=b+c \Rightarrow d=b$,
durch b) $\Rightarrow b=c=d=e$
d) Aus 2. und 5. erhält man: $d+e=b+c=e+a \Rightarrow d+e=e+a \Rightarrow d=a$,

Durch c) und d) $\Rightarrow a=b=c=d=e$

Daraus folgt, dass jede positive Zahl n, mit $n=a$, $n=b$, $n=c$, $n=d$ und $n=e$, die Brüche A bis E ganzzahlig löst.
Anders ist dies nicht möglich, da nur mit Äquivalenzumformungen gearbeitet wurde.
2.) a) Angabe:

Jacek hat vier Stöcke mit ganzzahliger Länge, mit denen er auf einem Tisch ein konvexes Viereck legt. Egal welche drei von den vier Stöcken er nimmt, er kann aus ihnen nie ein Dreieck bilden. Wie groß ist der kleinstmögliche Umfang dieses Vierecks?

a) Lösung:

Nimmt Jacek die Stöcke mit den Längen 1, 1, 2 und 3, so lässt sich daraus das Viereck mit dem kleinsten Umfang, nämlich 7, legen, da:

1.) Mit keinem dieser vier Stöcke ein Dreieck gebildet werden kann.

2.) Kein kleineres solches Viereck vorhanden ist, da er sonst entweder drei Stöcke der Länge 1, oder zwei Stöcke der Länge 2 und mindestens einen Stock der Länge 1 hätte. In beiden Fällen wäre nun die Bildung eines Dreiecks möglich, entweder ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1, oder ein gleichschenkeliges Dreieck mit zwei Seiten mit der Länge 2 und einer Seite mit der Länge 1.

---

b) Angabe:

Jozef hat sechs Stöcke mit ganzzahliger Länge, mit denen er auf einem Tisch ein konvexes Sechseck legt. Genau wie bei Jacek ist es nicht möglich, mit beliebigen drei dieser Stöcke ein Dreieck zu bilden. Wie lang ist der längste Stock dieses Sechsecks?

b) Lösung:

Nimmt Jozef sechs Stöcke mit den Längen 1, 1, 2, 3, 5 und 8, so lässt sich daraus das Sechseck legen, der kürzest mögliche längste Stock hat die Länge 8, da:

1. Sich mit keinen drei dieser sechs Stöcke ein Dreieck bilden lässt.
2. Kein kleineres solches Sechseck vorhanden ist, da laut a) 1, 1, 2 und 3 die kleinstmögliche Art ist, ein solches Viereck zu legen, und andernfalls er mindestens einen Stock der Länge 3 oder 4 hat und daher ein Dreieck mit den Stöcken 2, 3 und 3/4 bilden könnte. Also muss der fünfte Stock die Länge 5 haben. Aus dem selben Grund (Andernfalls lässt sich Dreieck mit 3, 5 und 5/6/7 bilden) muss der längste Stock die Länge 8 haben.

3.) **Angabe**:

Bestimme die Anzahl aller sechsstelligen Palindrome, die durch sieben teilbar sind. (Ein sechsstelliges Palindrom ist eine Zahl in der Form abccba, wobei $a \neq 0$, b und c Ziffern jener Zahl sind.)

Lösung:

abccba= 100001*a+10010*b+1100*c =
7*(14286*a+1430*b+157*c)-(a-c)

Soll diese Zahl nun durch 7 teilbar sein, muss (a-c) durch 7 teilbar sein.
Da a ($\neq 0$) und c Ziffern sind, muss gelten: $-8 \leq (a-c) \leq 9$.

Daraus folgt, dass (a-c) Element aus $\{-7,0,7\}$.

Für (a-c) = -7 gibt es die Lösungen a=1 und c=8, bzw. a=2 und c=9
Für (a-c) = 0 gibt es die Lösungen a=c=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9
Für (a-c) = 7 gibt es die Lösungen a=7 und c=0, bzw. a=8 und c=1, bzw. a=9 und c=2.

Insgesamt gibt es also 14 Möglichkeiten für a und c. Da b auch eine Ziffer ist gibt es für b 10 Möglichkeiten.

=> Es gibt 14*10 = 140 sechsstellige Palindrome die durch 7 teilbar sind.