Kategorie A (jednotlivci), úloha 2

(A–I–2)

Zadání

In the domain of real numbers, solve the system of equations

$$\begin{aligned} x &= p^2 + y^2 \\ y &= q^2 + z^2 \\ z &= r^2 + x^2 \end{aligned}$$

With non-negative real parameters p, q, r satisfying $p + q + r = \frac{3}{2}$.

Řešení

Nejprve si sečtěme rovnice a upravme je:

$x = p^2 + y^2$

$y = q^2 + z^2$

$\underline{z = r^2 + x^2}$

$x + y + z = p^2 + q^2 + r^2 + y^2 + z^2 + x^2$

$0 = p^2 + q^2 + r^2 + (y^2 - y) + (z^2 - z) + (x^2 - x)$

$-p^2 - q^2 - r^2 = y(y-1) + z(z-1) + x(x-1)$

Levá strana rovnice musí být nekladná kvůli členům umocněným na druhou, pravá strana teda také. p, q, r jsou nezáporná čísla a jejich součet je $\frac{3}{2}$, tudíž levá, a tedy i pravá, strana rovnice musí být **záporná**.

Potřebujeme zjistit, jakou nejmenší hodnotu může nabývat pravá strana rovnice.

Minimum pro $f(y) = y(y-1) = y^2 - y$ se nachází v bodě $y = \frac{1}{2}$. Minima pro $f(x) = x(x-1)$ a $f(z) = z(z-1)$ po řadě v bodech $x = \frac{1}{2}$ a $z = \frac{1}{2}$.

Pravá strana rovnice může tedy nabývat nejméně:

$\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$

Teď si zjistěme maximum hodnoty levé strany rovnice. To můžeme udělat tak, že zjistíme minimální hodnotu součtu $p^2 + q^2 + r^2$.

Jelikož $p + q + r = \frac{3}{2}$, tak $p^2 + q^2 + r^2$ bude nejmenší právě tehdy, když $p = q = r$.

Bude tedy platit $p = q = r = \frac{1}{2}$.

Nejvyšší hodnota levé strany je tedy:

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

Průnikem intervalů hodnot levé a pravé strany je pouze jeden bod, a to $-\frac{3}{4}$.

Řešení soustavy rovnic:

Soustava má řešení pouze v případě, že $\boldsymbol{x = y = z = p = q = r = \frac{1}{2}}$.

Zkouška:

$L_1 = \frac{1}{2}$

$P_1 = \frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^2 = \frac{1}{2}$

$\boldsymbol{L_1 = P_1}$

$L_2 = \frac{1}{2}$

$P_2 = \frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^2 = \frac{1}{2}$

$\boldsymbol{L_2 = P_2}$

$L_3 = \frac{1}{2}$

$P_3 = \frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^2 = \frac{1}{2}$

$\boldsymbol{L_3 = P_3}$