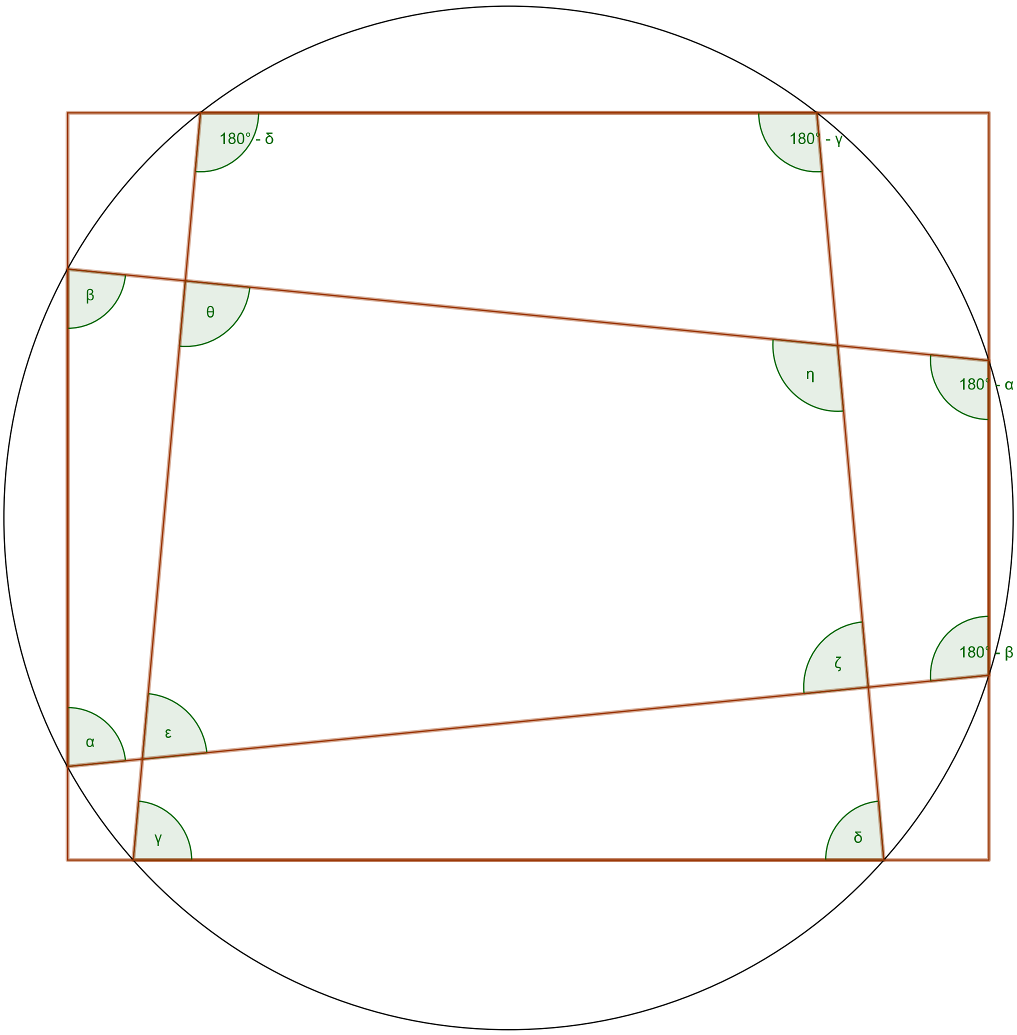
Kategorie B

Einzelwettbewerb

Beispiel 3

Aufgabenstellung

Ein Kreis schneidet jede der Seiten eines Rechtecks in zwei Punkten. Schnittpunkte an je zwei gegenüber liegenden Seiten sind Eckpunkte eines Trapezes. Beweise, dass die Schnittpunkte dieser beiden Trapeze innerhalb des Rechtecks Eckpunkte eines Sehnenvierecks sind.



Lösungsweg

Ein Sehnenviereck ist ein Viereck, dessen Eckpunkte auf einer Kreislinie liegen. Demnach sind die beiden Trapeze Sehnenvierecke. Wir können jetzt in jedem Trapez zwei benachbarte Winkel mit den Buchstaben α, β bzw. γ, δ benennen. Jeweils gegenüberliegende Winkel sind dann 180° minus diesen Winkeln.

Jetzt bezeichnen wir die Winkel des Innenvierecks mit ε, ζ, η, θ. Die Scheitelwinkel außerhalb des Vierecks zu jedem dieser Winkel sind dann gleich groß.

In jedem der Vierecke an den Eckpunkten des großen Rechtecks können wir nun eine Gleichung aus der Winkelsumme und den bekannten Winkeln aufstellen.

$$360° = 90° + (180° - \alpha) + (180° - \gamma) + \varepsilon$$

$$360° = 90° + (180° - \delta) + \beta + \zeta$$

$$360° = 90° + \alpha + \gamma + \eta$$

$$360° = 90° + \delta + (180° - \beta) + \theta$$

Umgeformt ergibt dies

$$\varepsilon = \alpha + \gamma - 90°$$

$$\zeta = \delta - \beta + 90°$$

$$\eta = -\alpha - \gamma - 90°$$

$$\theta = \beta - \delta + 90°$$

Wenn wir jeweils für zwei gegenüberliegende Innenviereckwinkel die Ausdrücke addieren, erhalten wir stets 180°, weshalb das Innenviereck ein Sehnenviereck sein muss.

$$\varepsilon + \eta = \alpha - \alpha + \gamma - \gamma - 90° - 90° = 180°$$

$$\zeta + \theta = \beta - \beta + \delta - \delta + 90° + 90° = 180°$$

Beispiel 4

Aufgabenstellung

Für wie viele Zahlen der Menge { 1, 2, 3, …, 2016 } ist der Rest ihres Quadrates dividiert durch 2016 gleich 1?

Lösungsweg

Anders formuliert: Für wie viele z in der Menge $M = \{ 1, 2, 3, …, 2016 \}$ gilt $z^2 \equiv 1 \pmod{2016}$ bzw. $z^2 - 1 \equiv 0 \pmod{2016}$? $z^2 - 1$ können wir in $(z + 1) \times (z - 1)$ aufspalten, so dass es also darum geht, für welche z $(z + 1) \times (z - 1)$ durch 2016 teilbar ist.

Zerlegt in seine Primfaktoren ist $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$. Wenn $(z + 1) \times (z - 1)$ durch 2016 teilbar sein soll, müssen alle Primfaktoren von 2016 in den beiden Faktoren vorkommen.

Wir können jetzt über die Faktoren $(z + 1)$ und $(z - 1)$ einige Aussagen aufstellen:

- Da 2016 durch 2 teilbar ist, muss einer der Faktoren durch 2 teilbar sein. Der andere ist genau 2 von diesem entfernt, weshalb er selbst auch durch 2 teilbar sein muss (beide Faktoren sind also gerade). Einer der Faktoren ist also durch 2^k teilbar, der andere durch $2^{(5-k)}$, wobei $1 \le k \le 4$.
- Einer der Faktoren muss durch 3 teilbar sein, der andere kann dies nicht sein. Deshalb muss einer der Faktoren durch 9 teilbar sein.
- Einer der Faktoren muss durch 7 teilbar sein, der andere kann dies nicht sein.

Jetzt gibt es folgende Möglichkeiten, wie die Teiler in den beiden Faktoren vorkommen können:

Faktor 1	**Faktor 2**
$2^4 \times 3^2 \times 7$	2^1
$2^3 \times 3^2 \times 7$	2^2
$2^2 \times 3^2 \times 7$	2^3
$2^1 \times 3^2 \times 7$	2^4
$2^4 \times 3^2$	$2^1 \times 7$
$2^3 \times 3^2$	$2^2 \times 7$
$2^2 \times 3^2$	$2^3 \times 7$
$2^1 \times 3^2$	$2^4 \times 7$

Nun können wir für jede dieser Möglichkeiten die gemeinsamen Vielfache finden. Wenn wir dies machen, kommen wir am Ende auf 16 Zahlen, die die Bedingung erfüllen:

1, 127, 433, 449, 559, 575, 881, 1007, 1009, 1135, 1441, 1457, 1567, 1583, 1889, 2015