DUELL 2016 - Lösungen der Einzelbewerbsaufgaben der Kategorie A

Konstantin Andritsch

11. April 2016, Graz

Aufgabe 1

Aufgabenstellung

Finde die größte positive ganze Zahl n mit der folgenden Eigenschaft: Das Produkt

$$(k+1)*(k+2)*(k+3)*...*(k+2016)$$

ist durch 2016^n für jede positive ganze Zahl k.

Lösung

Das Produkt besteht aus 2016 aufeinanderfolgenden positiven Zahlen. 2016 hat die Primfaktorenzerlegung $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.
Die Mindestanzahl an Primfaktoren 2 in dem Produkt ist

$$\lfloor\frac{2016}{2}\rfloor + \lfloor\frac{2016}{4}\rfloor + \lfloor\frac{2016}{8}\rfloor + \lfloor\frac{2016}{16}\rfloor + \lfloor\frac{2016}{32}\rfloor + \lfloor\frac{2016}{64}\rfloor + \lfloor\frac{2016}{128}\rfloor + \lfloor\frac{2016}{256}\rfloor + \lfloor\frac{2016}{512}\rfloor + \lfloor\frac{2016}{1024}\rfloor = 2010$$

jedoch, wenn sich n um eins steigert, muss sich die Anzahl an Zweien um 5 steigern, da $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Das bedeutet es werden $5 \cdot n$ Zweien mehr in dem Produkt benötigt, damit das Produkt durch 2016^{n+1} teilbar ist.

$\Rightarrow n \leq \frac{2010}{5} = 402$

Das selbe gilt auch für die Primzahl 3:

$$\lfloor\frac{2016}{3}\rfloor + \lfloor\frac{2016}{9}\rfloor + \lfloor\frac{2016}{27}\rfloor + \lfloor\frac{2016}{81}\rfloor + \lfloor\frac{2016}{243}\rfloor + \lfloor\frac{2016}{729}\rfloor = 1004$$

aus dem selben Grund wie vorhin gilt daher

$\Rightarrow n \leq 502$

Und natürlich auch für 7:

$$\lfloor\frac{2016}{7}\rfloor + \lfloor\frac{2016}{49}\rfloor + \lfloor\frac{2016}{343}\rfloor = 334$$

da die 7 als Primfaktor nur einmal in 2016 auftritt folgt

$\Rightarrow n \leq 334$

Da die Anzahl an diesen Primfaktoren in dem Produkt mit höher werdendem k nicht geringer werden kann, da das Produkt immer aus 2016 aufeinanderfolgenden Zahlen besteht und somit mindestens diese Anzahl an Primfaktoren enthalten ist gilt $n = 334$.

Aufgabe 2

Aufgabenstellung

Löse in der Menge der reellen Zahlen folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x &= p^2 + y^2 \\ y &= q^2 + z^2 \\ z &= r^2 + x^2 \end{aligned}$$

mit den nicht-negativen Parametern p, q, r vorausgesetzt $p + q + r = \frac{3}{2}$.

Lösung

Addieren wir die drei Gleichungen, bringen alles auf die rechte Seite und ordnen wir die Summanden etwas um, so ergibt sich folgende Gleichung:

$$0 = x^2 - x + y^2 - y + z^2 - z + p^2 + q^2 + r^2$$

Da p, q und r nicht-negativ sind, gilt $\sqrt{\frac{p^2+q^2+r^2}{3}} \leq \frac{p+q+r}{3} = \frac{3}{2}$.
Somit kann man die Summe $p^2 + q^2 + r^2$ auf folgendes abschätzen:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{p^2+q^2+r^2}{3}} &\leq \frac{p+q+r}{3} \\
\frac{p^2+q^2+r^2}{3} &\leq \frac{(p+q+r)^2}{9} \\
p^2+q^2+r^2 &\leq \frac{\frac{3}{2}^2 \cdot 3}{9} \\
p^2+q^2+r^2 &\leq \frac{\frac{9}{4}}{3} \\
p^2+q^2+r^2 &\leq \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

setzt man nun diese Ungleichung in unsere Gleichung ein ergibt sich:

$$0 \leq x^2 - x + y^2 - y + z^2 - z + \frac{3}{4}$$

Durch aufteilen der $\frac{3}{4}$ steht:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} + z^2 - z + \frac{1}{4} \\
0 &\leq (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + (z - \frac{1}{2})^2
\end{aligned}
$$

Diese Ungleichung kann nur erfüllt sein, wenn alle drei Quadrate null sind, sprich $x = y = z = \frac{1}{2}$.
Das bedeutet die einzige Lösung, die das Gleichungssystem erfüllt, ist $p = q = r = x = y = z = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 3

Aufgabenstellung

Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ in der Ebene. Finde die Orte aller Punkte P für die APQ ein gleichschenkeliges, rechtwinkeliges Dreieck, mit rechtem Winkel in P ist, sodass der Eckpunkt Q auf der Seite CD des gegebenen Quadrats liegt.

Lösung

Annahme, alle Punkte P, für diese es einen Punkt Q gibt, sodass alle Anforderungen erfüllt sind, liegen auf den 2 Orangen Strecken in Abbildung 1.

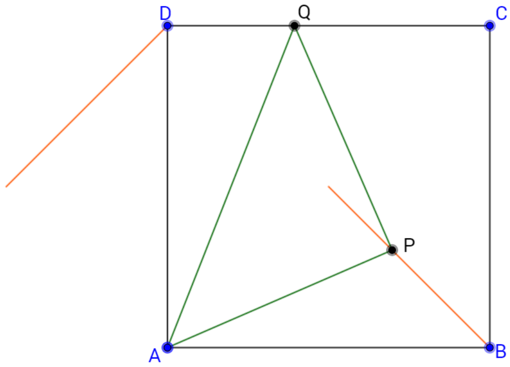

Abbildung 1

Die orangen Strecken, schließen jeweils den Winkel 45° mit einer Seite des Quadrats ein, sprich die Strecke im inneren des Quadrats ist Die Verbindung von B mit dem Mittelpunkt des Quadrats.
Aufgrund der Analogen Vorgehensweise, wird nur mehr die Strecke im Inneren des Quadrats behandelt.

1.Richtung: Das Dreieck AQP ist rechtwinkelig und gleichschenkelig

Zu zeigen: P liegt auf der orangen Strecke im inneren des Quadrats.

$\measuredangle APQ = 90°$
$\measuredangle QDA = 90°$

$\Rightarrow$ $APQD$ ist ein Sehnenviereck.

$\Rightarrow \measuredangle PDQ = \measuredangle PAQ = 45°$

$\Rightarrow$ P liegt auf der Winkelsymmetralen von $\measuredangle ADC$ also auch auf der Winkelsymmetralen von $\measuredangle ABC$.

Im Extremfall $Q = D$ gilt zwangsläufig, das P der Mittelpunkt des Quadrats ist.
Im Extremfall $Q = C$ gilt zwangsläufig, das $P = B$.

Da P sicher auf der Strecke BD liegt, da das die Winkelsymmetrale von $\measuredangle AbC$ ist, und in einem Extremfall $P = B$ und im anderen P der Mittelpunkt des Quadrats ist, müssen alle Punkte zwischen diesen Extremfällen liegen. Das sind genau alle Punkte auf der orangen Strecke im inneren des Quadrats.

2.Richtung: P liegt auf der orangen Strecke und $\measuredangle APQ = 90°$

Zu zeigen: APQ ist gleichschenkelig.

$\measuredangle APQ = 90°$
$\measuredangle QDA = 90°$

$\Rightarrow APQD$ ist ein Sehnenviereck.
$\Rightarrow \measuredangle PAQ = \measuredangle PDQ = 45°$

$\measuredangle PAQ = 45° \Rightarrow \measuredangle PQA = 45°$

$\Rightarrow APQ$ ist gleichschenkelig.

Aufgabe 4

Aufgabenstellung

Auf jedem Feld eines 10x10 Bretts sitzt genau ein Floh. Auf ein Signal hüpfen alle Flöhe diagonal über ein Feld auf ein anderes Feld des Bretts. Danach gibt es einige Felder mit mehreren Flöhen und andere die leer sind. Finde die minimale Anzahl an freien Feldern.

Lösung

Da jeder Floh nach dem Signal in dem 10x10 Brett Diagonal über ein Feld auf das nächste hüpft, bewegt sich jeder Floh um genau 2 Spalten, sowie 2 Reihen weiter.
Färbt man das 10x10 Brett in den Farben schwarz und weiß mit einer geeigneten Strategie (siehe Abbildung 2), so ist, da der Floh um 2 Spalten weiterspringt, offensichtlich, dass saß er zuerst auf einem schwarzen Feld, er nun auf einem weißen und saß er zuerst auf einem weißen Feld, er nun auf einem schwarzen sitzt.

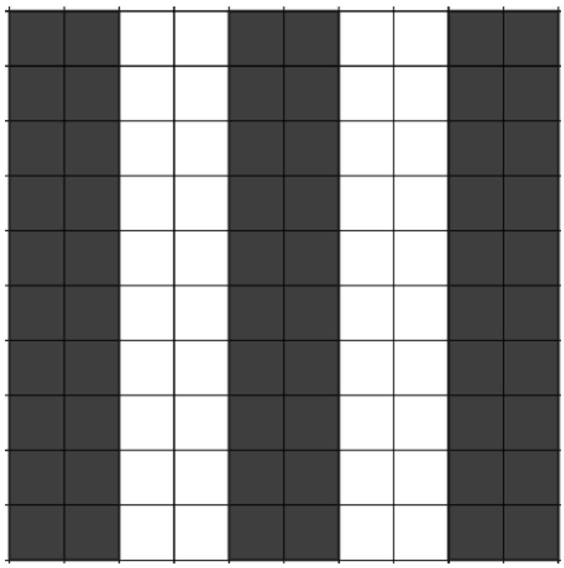

Abbildung 2

Die Anzahl an Flöhen auf weißen Feldern war zu Beginn 40. Es gibt daher 60 schwarze Felder. Da ein Floh, der auf einem weißen Feld saß, nach dem Signal auf ein schwarzes hüpft, und es nur 40 weiße Flöhe, für 60 schwarze Felder gibt, bleiben mindestens 20 Felder sicher frei.
Finden wir ein Beispiel, bei dem am Ende 20 Felder frei bleiben, so haben wir unsere Aussage bewiesen.
Ein mögliches Beispiel:

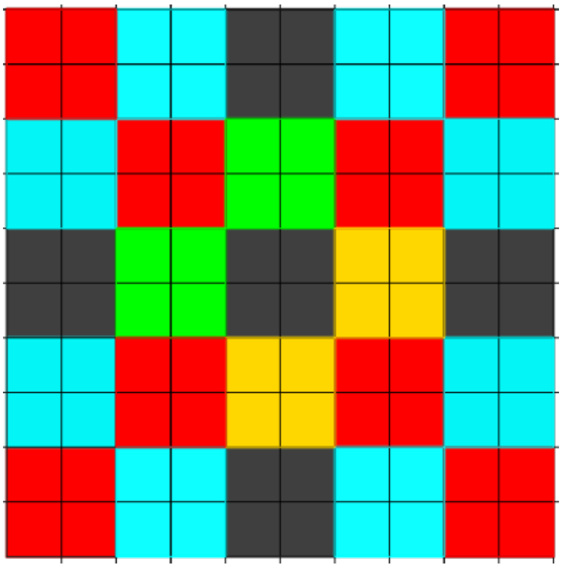

Abbildung 3

Wobei alle Flöhe eines 2x2 Bereichs mit den 4 Flöhen des diagonal angrenzenden 2x2 Bereichs in der selben Farbe, die Plätze tauschen. Die einzigen 20 Felder, von denen Ein Floh weg hüpft, jedoch kein anderer hinauf sind die 20 schwarzen Felder. Damit ist bewiesen, dass die Mindestanzahl an frei bleibenden Feldern 20 ist.