24^{th} Mathematical Duel

Category B – Team Competition

1. Bestimme alle 4-stelligen Zahlenpalindrome n (das sind Zahlen, die sich von vorne nach hinten und von hinten nach vorne gleich schreiben), so dass $17n$ eine Quadratzahl ist.

   Lösung: Das Palindrom muss durch *17* teilbar sein, da jede Quadratzahl jeden ihrer Primfaktoren in gerader Anzahl enthält. Ist n nicht durch *17* teilbar, so kann $17n$ auch keine Quadratzahl sein.

   Jedes 4-stellige Palindrom kann man als $1001a+110b$ schreiben, da die erste Ziffer dieselbe als die letzte und die zweite dieselbe wie die dritte ist. a ist hierbei eine natürliche Zahl zwischen *1* und *9*, b zwischen *0* und *9*.

   Um zu überprüfen, welche Palindrome durch *17* teilbar sind, stellt man $1001a+110b$ im *modulo 17* kongruent zu 0:

   $1001a+110b \equiv 0 \quad (\text{modulo } 17)$

   Im *modulo 17* ist $110b$ äquivalent zu $8b$ und $1001a$ äquivalent zu *15* oder *-2*. Letzteres werde ich verwenden, da es die Rechnung vereinfacht:

   $8b-2a \equiv 0 \quad (\text{modulo } 17)$

   Setzt man nun für b die Werte *0-9* ein und überprüft mögliche Werte für a, so erhält man folgende Tabelle:

B	**A**
0	0
1	4
2	8
3	Keine mögliche Lösung der Gleichung
4	Keine mögliche Lösung der Gleichung
5	3
6	7
7	Keine mögliche Lösung der Gleichung
8	Keine mögliche Lösung der Gleichung
9	2

   Mögliche Endungen für eine Quadratzahl sind (in Klammern stehen die möglichen letzten Ziffern der Quadratwurzel): *0* (*0*), *1*(*1*,*9*),*4*(*2*,*8*),*5*(*5*),*6*(*4*,*6*),*9*(*3*,*7*)

   a muss daher entweder *2*,*5*,*7* oder *8* sein, da $n*17$ eine solche Endung haben muss und nur *2*,*5*,*7* oder *8* multipliziert mit *17* mit einer der obenstehenden Ziffern enden.

   Daher können wir die obige Tabelle auf die folgenden Palindrome kürzen: *2992*,*7667*,*8228*

   Da jede Quadratzahl aus einer geraden Anzahl von Primfaktoren bestehen muss, können wir, anstatt diese Palindrome mit 17 zu multiplizieren, sie, um kleinere Zahlen zu erhalten, sie auch einfach durch 17 teilen.

   Nur bei 8228 entspricht das einer Quadratzahl ($484 – 22^2$) und daher ist 8228 die einzige Lösung.

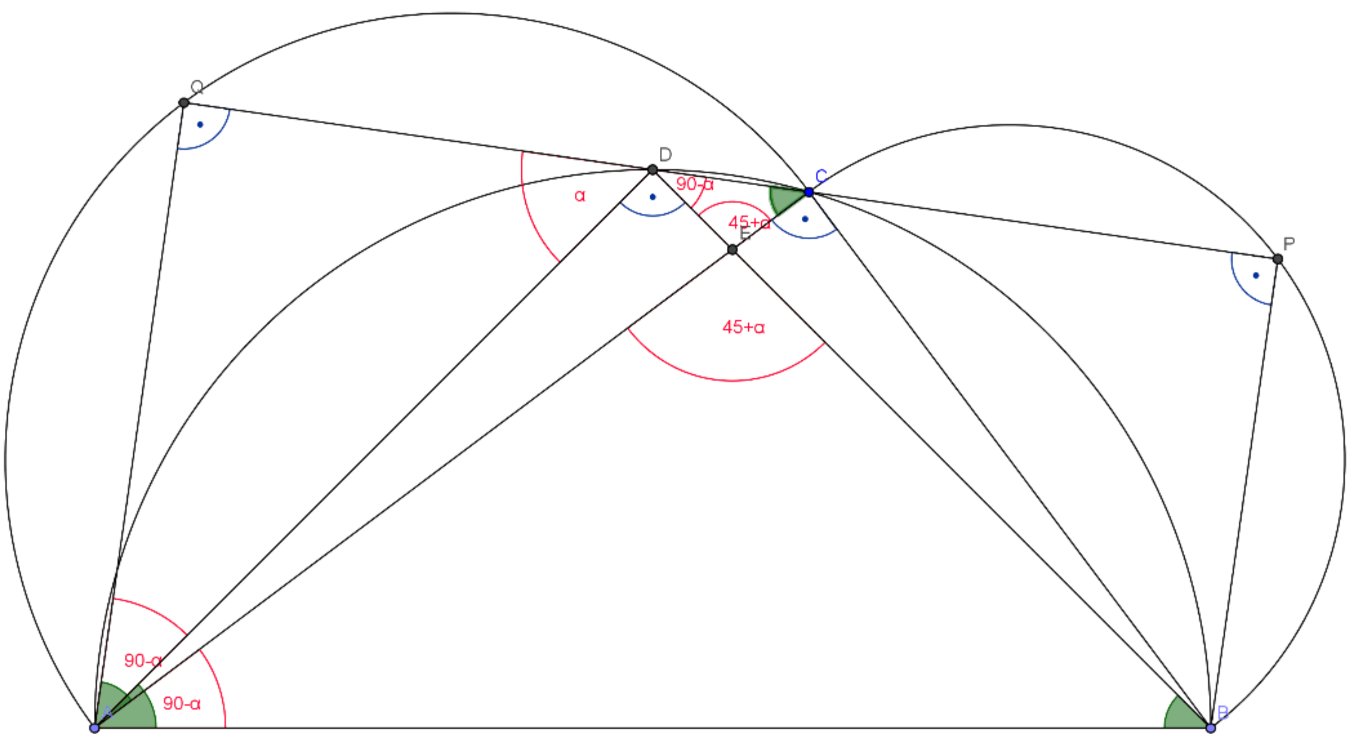
2. Ein rechtwinkliges Dreieck *ΔABC* ist in der Ebene gegeben. Seine Schenkel *BC* und *AC* sind Hypotenusen von zwei rechtwinkligen, gleichschenkeligen Dreiecken *ΔBCP* und *ΔACQ* außerhalb des Dreiecks *ΔABC*. *D* ist der dritte Eckpunkt des gleichschenkeligen, rechtwinkeligen Dreiecks *ABD* mit der Hypotenuse *AB* ins Dreieck *ΔABC* gestreckt. Beweise, dass *D* auf der Strecke *PQ* liegt.

Lösung: Der Punkt *C* liegt auf der Strecke *PQ*, da der Winkel ∡*PCQ 180°* beträgt und daher *CP* und *CQ* Teilstrecken der Strecke *PQ* sind. Der Winkel ∡*PCQ* beträgt *180°*, da die Dreiecke *ΔACQ* und *ΔBCP* gleichschenkelig und rechtwinkelig sind und daher die Winkel ∡*ACQ* und ∡*BCP* je *45°* und der Winkel ∡*ACB 90°* betragen.

Den Schnittpunkt der Strecken *AC* und *BD* benennen wir *E*.

Nennt man den Winkel ∡*ADQ α*, so ist der Winkel ∡*DAQ* aufgrund der Winkelsumme im Dreieck *90-α* und da die Winkel ∡*CAQ* und ∡*BAD 45* Grad betragen (Wegen der gleichschenkeligen, rechtwinkeligen Dreiecke *ΔACQ* und *ΔABD*) muss der Winkel ∡*CAB* auch *90-α* sein.

Der Winkel ∡*AEB* ist daher *45+α* und der Winkel ∡*CED* ist, da er ein Scheitelwinkel des Winkels ∡*AEB* ist, auch *45+α*. Daraus folgt, dass der Winkel ∡*CDE 90-α* ist. Der Winkel ∡*PDQ* beträgt daher *180° (α + 90-α + 90)* und daher sind *QD* und *PD* Teilstrecken der Strecke *PQ*. Daher liegt der Punkt *D* auf der Strecke *PQ*.



3. Eine Menge *A* besteht aus positiven ganzen Zahlen, die nicht durch 7 teilbar sind. Wie viele Elemente muss die Menge *A* zumindest beinhalten, damit es sicher eine Teilmenge von *A* gibt, sodass die Summe seiner Quadrate durch *7* teilbar ist.

Lösung: Jede Zahl dieser Teilmenge muss im *modulo 7* einer der Zahlen *1-6* entsprechen. Quadriert man diese im *modulo 7*, so erhält man die rechts stehende Tabelle:

AUSGANGS-ZAHLEN IM MOD 7	**QUADRATE IM MOD 7**
1	1
2	4
3	2
4	2
5	4
6	1

Fall 1: Es existiert mindestens eine Zahl, die quadriert im *modulo 7 1* entspricht

Links steht die Anzahl der Zahlen, die quadriert im *modulo 7 1* entsprechen. In den anderen Spalten steht die benötigte Anzahl von Zahlen der Bedingung oben in der Spalte, um eine Teilmenge zu erhalten, sodass die Summe der Quadrate durch *7* teilbar ist. Sind sowohl Zahlen, dessen Quadrat im *modulo 7 2* entspricht als auch Zahlen, dessen Quadrat im *modulo 7 4* entspricht enthalten, so gibt es eine solche Teilmenge (*1+2+4=7*). Sind *7* oder mehr Zahlen mit dem Quadrat *1* im *modulo 7* enthalten, so gibt es immer eine Lösung. Daher endet die Tabelle bei *7*.

ZAHLEN MIT DEM QUADRAT 1 IM MOD 7	**ZAHLEN MIT DEM QUADRAT 2 IM MOD 7 BENÖTIGT**	**ZAHLEN MIT DEM QUADRAT 4 IM MOD 7 BENÖTIGT**
1	3	5
2	3	3
3	2	1
4	2	1
5	1	1
6	1	1
7	0	0

Fall 2: Es existiert mindestens eine Zahl, die quadriert im modulo 7 2 entspricht

ZAHLEN MIT DEM QUADRAT 2 IM MOD 7	ZAHLEN MIT DEM QUADRAT 1 IM MOD 7 BENÖTIGT	ZAHLEN MIT DEM QUADRAT 4 IM MOD 7 BENÖTIGT
1	5	3
2	3	3
3	1	2
4	1	2
5	1	1
6	1	1
7	0	0

Fall 3: Es existiert mindestens eine Zahl, die quadriert im modulo 7 4 entspricht

ZAHLEN MIT DEM QUADRAT 4 IM MOD 7	ZAHLEN MIT DEM QUADRAT 1 IM MOD 7 BENÖTIGT	ZAHLEN MIT DEM QUADRAT 2 IM MOD 7 BENÖTIGT
1	3	5
2	3	3
3	2	1
4	2	1
5	1	1
6	1	1
7	0	0

Sieht man sich die Tabellen an, so fällt auf, dass es keine Menge mit 7 Elementen geben kann, in der es keine dieser Kombinationen gibt.
Daher hat jede Menge, die mindestens 7 Elemente besitzt, eine Teilmenge, deren Quadrate addiert durch 7 teilbar sind.