24th Duel - 2016
Category B Team Solutions, GJŠ Přerov

B–T–1
Problem
Determine all 4-digit palindromic numbers n (i.e. a number that reads the same from front to back and from back to front), such that $17n$ is a perfect square.

Solution
Čtyřmístný palindrom zapíšeme: $\overline{xyyx}$

$n = \overline{xyyx} = 1000x + 100y + 10y + x = 1001x + 110y$

$17n = k^2$

$17 \cdot (1001x + 110y) = k^2$

$17 \cdot 11 \cdot (91x + 10y) = k^2$

$91x + 10y$ musí být číslo ve tvaru $17 \cdot 11 \cdot a^2 = 187 \cdot a^2$

$91x + 10y = 187 \cdot a^2$

Jelikož maximální hodnota x i y je 9 (číslice), maximální hodnota levé strany je 909.

Jediné násobky 187, pro které platí, že $187k < 909$,jsou 187, 374, 561 a 748.

Jelikož pravá strana je ve tvaru $187 \cdot a^2$, kde $a \in \mathbb{N}$, jediné dvě možné hodnoty jsou $187 \cdot 1^2 = 187$ a $187 \cdot 2^2 = 748$.

$10|(187 \cdot a^2) - 91x$

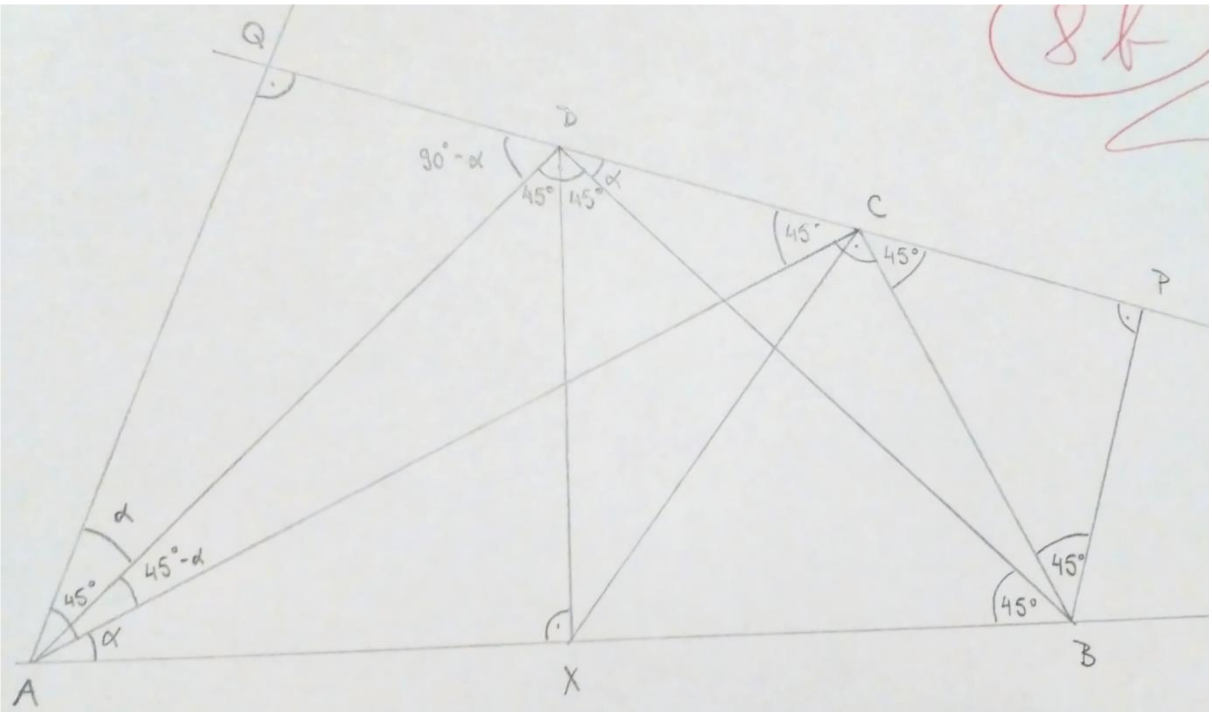
Proto jediné možné řešení je $8 \cdot 91 + 10 \cdot 2 = 748$. Takový palindrom je tedy ve tvaru **8228** a je to jediné řešení této úlohy.

B–T–2

Problem

A right-angled triangle ABC in the plane is given. Its legs BC and AC are hypotenuses of two right-angled isosceles triangles BCP and ACQ erected outside ABC. Let D be the vertex of the right-angled isosceles triangle ABD with hypotenuse AB erected inside ABC. Prove that the point D belongs to the line PQ.

Solution



Body A,D,C,B leží na Thaletově kružnici $(X; |XA|)$.

$\Delta AQC, \Delta BCP, \Delta ABD$ jsou rovnoramenné, proto $|\sphericalangle QCA| = 45°$, $|\sphericalangle QAC| = 45°$, $|\sphericalangle PBC| = 45°$, $|\sphericalangle PCB| = 45°$, $|\sphericalangle DBA| = 45°$.

Vrchol C leží na DP, protože $|\sphericalangle QCP| = 90° + 45° + 45° = 180°$

$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle BDC| = \alpha$ (BC vidíme z bodů D i A pod stejným úhlem)

$|\sphericalangle DAC| = 180° - 90° - 45° - \alpha = 45° - \alpha$

$|\sphericalangle QAD| = 45° - (45° - \alpha) = \alpha$

$|\sphericalangle QDA| = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$

$|\sphericalangle QDP| = 90° - \alpha + \alpha + 90° = 180°$

Velikost úhlu QDP je 180°, tzn., že bod D leží na přímce PQ.

B–T–3
Problem
A set $\mathcal{A}$ consists exclusively of positive integers not divisible by 7. How many elements must the set $\mathcal{A}$ at least contain in order to be sure that there is an non-empty subset of $\mathcal{A}$, such that the sum of the squares of the elements of this subset is divisible by 7?

Solution
Pokud čísla z množiny $\mathcal{A}$nejsou dělitelná 7, mohou po dělení 7 dávat právě 6 různých zbytků. Každý z případných zbytků si rozepíšeme a zjistíme, jaké zbytky dávají druhé mocniny těchto čísel.

1) $n \equiv 1\ (mod\ 7)$
   $n^2 \equiv 1\ (mod\ 7)$
2) $n \equiv 2\ (mod\ 7)$
   $n^2 \equiv 4\ (mod\ 7)$
3) $n \equiv 3\ (mod\ 7)$
   $n^2 \equiv 2\ (mod\ 7)$
4) $n \equiv 4\ (mod\ 7)$
   $n^2 \equiv 2\ (mod\ 7)$
5) $n \equiv 5\ (mod\ 7)$
   $n^2 \equiv 4\ (mod\ 7)$
6) $n \equiv 6\ (mod\ 7)$
   $n^2 \equiv 1\ (mod\ 7)$

Vidíme, že druhé mocniny čísel z množiny $\mathcal{A}$ dávají 3 různé zbytky po dělení číslem 7: 1, 2 nebo 4.

Rozebereme případy zbytků, které můžou být v množině, abychom zjistili, kolik nejméně čísel bychom v množině potřebovali.

V množině jsou zbytky:
a) 1, 2 i 4 – stačila by 3 čísla
   $1 + 2 + 4 \equiv 0\ (mod\ 7)$
b) 1 nebo 2 – potřebovali bychom 6 čísel, abychom si byli jisti, že z množiny můžeme vybrat podmnožinu
c) 1 nebo 4 – potřebovali bychom 6 čísel
d) 2 nebo 4 – potřebovali bychom 6 čísel
e) jenom 1 – potřebovali bychom 7 čísel
f) jenom 2 – potřebovali bychom 7 čísel
g) jenom 4 – potřebovali bychom 7 čísel

(poslední číslo v řadě je vždy to, které pokud přidáme, tak jsme z množiny čísel s těmito zbytky schopni vybrat podmnožinu čísel, jejichž součet druhých mocnin je dělitelný sedmi)

Abychom si byli jisti, musí množina $\mathcal{A}$ být aspoň sedmiprvková.