ŘEŠENÍ 1. ÚLOHY KATEGORIE A

Bára Tížková

- k řešení využiji metodu teleskopických součtů - rozložím výraz na levé straně na součet 3 zlomků a zjistím hodnoty jejich jmenovatelů (v tomto případě A, B, C)

$$\frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}\cdot(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})} = \frac{A}{\sqrt{k}} + \frac{B}{\sqrt{k+1}} + \frac{C}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}\cdot(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\cdot A + \sqrt{k}\cdot(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\cdot B + \sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}\cdot C}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}\cdot(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})}$$

$$= \frac{\sqrt{k^2+k}\cdot(A+B+C) + k\cdot(A+B) + A}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}\cdot(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})}$$

- po porovnání s výchozím zlomkem dostaneme:

$\sqrt{k^2+k}\cdot(A+B+C) + k\cdot(A+B) + A = 1$ (pro všechna k)

→ A + B + C = 0
A + B = 0
A = 1

- řešením této soustavy je: A = 1, B = -1, C = 0
- to znamená, že původní výraz na levé straně můžeme přepsat takto:

$$\frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}\cdot(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{0}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

- a sumu na levé straně tedy můžeme rozepsat takto:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}\cdot(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})} = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{24}{25}$$

- druhý člen každé závorky se vyruší s prvním členem následující závorky, zůstane tedy:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{24}{25}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{24}{25}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{25}$$

$$\sqrt{n+1} = 25$$

$$n + 1 = 625$$

$$\mathbf{n = 624}$$

Jediné řešení rovnice je n = 624.