Kategorie A (Jednotlivci), Úloha 2

Zadání
Prove that there exist infinitely many natural powers of 4 such that their decimal representations contain at least one odd digit.

Řešení
Moje domněnka vedoucí k řešení úlohy – poslední číslice mocnin čísla 4 se v určitých intervalech musí opakovat (tzn. poslední číslice 4^x se budou rovnat posledním číslicím 4^{x+n}), protože pokud máme jakoukoliv mocninu čísla 4 s exponentem x, tak mocninu čísla 4 s exponentem o 1 vyšším dostaneme vynásobením mocnina čísla 4 s exponentem x číslem 4. A pokud mezi poslední číslicemi mocnin čísla 4 opakujícími v určitých intervalech nachází alespoň 1 liché číslo, pak důkaz bude hotov.

Vypišme si poslední číslice mocnin 4^1 až 4^{10}:

Mocnina	Poslední číslice
4^1	4
4^2	6
4^3	4
4^4	6
4^5	4
4^6	6
4^7	4
4^8	6
4^9	4
4^{10}	6

interval opakování se

Můžeme vidět, že všechny mocniny čísla 4 mají poslední číslici sudou, a to střídavě 4 a 6. To se dalo čekat, protože jsme násobili sudým činitelem. Teď se podíváme na poslední 2 číslice:

Mocnina	Poslední 2 číslice
4^1	4
4^2	16
4^3	64
4^4	56
4^5	24
4^6	96
4^7	84
4^8	36
4^9	44
4^{10}	76
4^{11}	04

Interval opakování se

Jak můžeme vidět, našli jsme interval, po kterém se poslední 2 číslice mocnin 4 opakují. Poslední 2 číslice 4^{11} jsou 04, proto poslední 2 číslice 4^{12} musí být 16 nezávisle na ostatních číslicích té mocniny. Protože existují liché číslice na místě desítek mocnin 4 v stále se opakujícím intervalu, pak existuje nekonečně mnoho mocnin 4 s alespoň 1 lichou číslicí.