Kategoria A

Zadanie 3

Treść:

Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta ABC, a h_a, h_b, h_c długościami jego wysokości poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A, B, C. Ponadto, niech d będzie średnicą okręgu opisanego na tym trójkącie. Udowodnij, że zachodzi nierówność:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{h_a+h_b+h_c}\geq d$$

Kiedy zachodzi równość?

Rozwiązanie:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{h_a+h_b+h_c}-d\geq 0$$

Ze wzorów na pole trójkąta otrzymujemy:

$$P=\frac{abc}{4\mathrm{R}}\Leftrightarrow 2\mathrm{R}=\frac{abc}{2\mathrm{P}}\Leftrightarrow d=\frac{abc}{2\mathrm{P}}$$
$$P=\frac{1}{2}ah_a\Leftrightarrow h_a=\frac{2\mathrm{P}}{a}$$
$$P=\frac{1}{2}bh_b\Leftrightarrow h_b=\frac{2\mathrm{P}}{b}$$

$$P=\frac{1}{2}ch_c\Leftrightarrow h_c=\frac{2\mathrm{P}}{c}$$

Podstawiając do lewej strony nierówności otrzymujemy:

$$L=\frac{a^2+b^2+c^2}{\frac{2\mathrm{P}}{a}+\frac{2\mathrm{P}}{b}+\frac{2\mathrm{P}}{c}}-\frac{abc}{2\mathrm{P}}=\frac{abc\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2\mathrm{P}\left(ab+bc+ac\right)}-\frac{abc}{2\mathrm{P}}=\frac{abc\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right)}{2\mathrm{P}\left(ab+bc+ac\right)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}abc\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]}{2\mathrm{P}\left(ab+bc+ac\right)}=\frac{abc\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]}{4\mathrm{P}\left(ab+bc+ac\right)}$$

Ponieważ a,b,c to długości boków trójkąta, P to pole tego trójkąta, więc:

$$a,b,c,P>0\Rightarrow\begin{cases}abc>0\\ 4\mathrm{P}>0\\ (ab+bc+ac)>0\end{cases}$$

Ponieważ kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemny, to

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$$

Zatem:

$$\left.\begin{array}{c} abc>0 \\ 4\mathrm{P}>0 \\ (ab+bc+ac)>0 \\ (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow L=\frac{abc\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]}{4\mathrm{P}(ab+bc+ac)}\geq 0 \Rightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{h_a+h_b+h_c}-d\geq 0$$

Równość zachodzi gdy:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Leftrightarrow a=b=c$$

więc gdy trójkąt jest równoboczny.

cnd.