25 Mathematical Duel

Kategoria A (konkurs indywidualny)
zadanie nr 4

$$f: R \to R$$

$$f(x+1) = 2f(x) + 1$$

Jeżeli funkcja f(x) przyjmuje skończenie wiele wartości, to dla pewnych argumentów x_0 i x_1 musi ona przyjmować odpowiednio wartość największą i najmniejszą.

Na mocy definicji x_0 zachodzi:

$$f(x_0) \geq f(x_0+1) = 2f(x_0) + 1 \qquad f(x_0) \leq -1$$

Jednocześnie na mocy definicji x_1 zachodzi:

$$f(x_1) \leq f(x_1+1) = 2f(x_1) + 1 \qquad f(x_1) \geq -1$$

Stąd:

$$-1 \geq f(x_0) \geq f(x_1) \geq -1$$

Czyli:

$$f(x_0) = f(x_1) = -1$$

Jako że $f(x_0)$ i $f(x_1)$ to odpowiednio maksymalna i minimalna wartość funkcji f(x), jedyną funkcją spełniającą podane równanie jest f(x) = -1.