Kategorie A (Týmy), úloha 1

A–I–1

$$2^x + 3^y + 5^z = 7^u$$

- Protože na pravé straně je liché číslo a na levé straně pro $x > 1$ sudé číslo musí být $x = 0$.
- Přepíšeme rovnici do tvaru: $3^y + 5^z = 7^u - 1$
- Budeme zkoumat zbytky výrazů na obou stranách po dělení číslem 3

1)

$3^y \rightarrow$ dělitelné číslem 3 pro $y \geq 1$

$5^z \rightarrow 5^z = (3+2)^z = \sum_{k=0}^{z} 3^{z-k} 2^k = 3^z 2^0 + 3^{z-1} 2^1 + \cdots + 3^0 2^z$ - poslední člen není dělitelný číslem 3

$$3^y + 5^z \equiv 2^z \ (mod\ 3)$$

2) $7^u - 1$

$7^u = (6+1)^u = \sum_{k=0}^{u} 6^{u-k} 1^k = 6^u 1^0 + 6^{u-1} 1^1 + \cdots + 6^0 1^u$ - poslední člen není dělitelný číslem 3

$$7^u \equiv 1^u (mod\ 3)$$
$$7^u \equiv 1\ (mod\ 3)$$
$$7^u - 1 \equiv 0\ (mod\ 3)$$

- Jelikož pravá stran je vždy dělitelná číslem 3, zatímco levá strana není (je kongruentní s 2^z) musí nastat případ $y = 0$
- $1 + 5^z = 7^u - 1$

  $5^z = 7^u - 2$
- Těmto podmínkám vyhovují: $z = 1; u = 1 \Rightarrow (x;\ y;\ z;\ u) = (0; 0; 1; 1)$