25th Duel - 2017
Category B Individual Solutions by Jaroslav Hradil, GJŠ Přerov

B–I–3

Problem

Prove that there exist infinitely many natural powers of 9 such that their decimal representations contain at least one even digit.

Solution

Vypíšeme si několik mocnin devíti:

$9^2 = 81$
$9^3 = 729$
$9^4 = 6561$

A všimneme si dvou zajímavých skutečností:

1. Poslední číslice je vždy 1 nebo 9 (respektive u sudých 1 a u lichých 9)

9^2	9	9^3	81	9^4	729	9^5	6561
	$\times 9$		$\times 9$		$\times 9$		$\times 9$
	81		729		6561		59049

   (protože 1 x 9 = 9; 9 x 9 = 81 → poslední číslice bude příště zase 1)

2. Předposlední číslice je vždy sudá, což dokážeme u násobení pod sebou:
   a. Jde o lichou mocninu, která vzniká vynásobením sudé mocniny devíti (S = sudá číslice)

      Také víme, že:
      Sudé × liché = sudé
      → 9 × sudé = sudé

S1
$\times 9$
9

      Dále se posouvá zbytek 0 → 9 × sudé = sudé + zbytek 0 = **sudé**

   b. Jde o sudou mocninu, která vzniká vynásobením liché mocniny devíti

S9
$\times 9$
1

      Dále se posouvá zbytek 8 → 9 × sudé = sudé + zbytek 8 = **sudé**

Dokázali jsme, že každá přirozená mocnina devíti, kromě 9^1, má vždy alespoň předposlední číslici sudou.