Problemlösen im Mathematikunterricht

Eine Analyse der Problemlösestrategien ausgewählter Schülerinnen und Schüler mit Schlussfolgerungen für die Unterrichtspraxis

Evita Hauke

Graz, 2017

„Dieses Projekt wurde mit Unterstützung der Europäischen Kommission finanziert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung trägt allein der Verfasser; die Kommission haftet nicht für die weitere Verwendung der darin enthaltenen Angaben.“

Problemlösen im Mathematikunterricht

Eine Analyse der Problemlösestrategien ausgewählter Schülerinnen und Schüler mit Schlussfolgerungen für die Unterrichtspraxis

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
einer Magistra der Naturwissenschaften

an der Karl-Franzens-Universität Graz

vorgelegt von

Evita HAUKE

am Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen

Begutachter: Ao.Univ.-Prof. Dr.phil. Bernd Thaller

Graz, 2017

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich, Evita Hauke, erkläre ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen nicht benutzt und die den Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen inländischen oder ausländischen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht. Die vorliegende Fassung entspricht der eingereichten elektronischen Version.

Datum Unterschrift

Kurzfassung

Die Diplomarbeit behandelt das Problemlösen und wie man dies im Unterricht lehren und lernen kann. Besondere Beachtung wird den begabten und interessierten Schülerinnen und Schülern gewidmet, beziehungsweise dem Problemlösen als mögliche Methode der Begabtenförderung im Mathematikunterricht.

Nach einer Einführung in das Problemlösen und kurzen Einblicken in Themen, die in Zusammenhang damit stehen, werden im Hauptteil die Aufgaben der Befragung erklärt und anschließend die Problemlösestrategien der befragten Schülerinnen und Schüler, die die 7. bis 12. Schulstufe besuchen, analysiert.

Es werden zudem Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen den beiden befragten Gruppen – Teilnehmerinnen und Teilnehmer des Wettbewerbs „Mathematical Duel“ sowie Schülerinnen und Schüler, die an keinem Mathematik-Olympiade-Kurs teilnehmen – untersucht.

Daraus werden im Anschluss Folgerungen gezogen, welche Aspekte beim Problemlösen im Mathematikunterricht besonders wichtig erscheinen.

Abstract

This diploma thesis deals with problem solving and possible methods of teaching and learning this aspect of mathematics education at school. Special attention is devoted to particularly talented and interested pupils in connection to problem solving as a method of gifted education in the teaching of mathematics.

After an introduction to the issue of problem solving and brief insights into topics related to it, the tasks used in the survey are explained in the main part, followed by the analysis of the information concerning problem solving strategies. This data was collected via a survey conducted with participants who are currently students from the 7th until the 12th grade.

In addition, data concerning differences and similarities between the two groups of participants contesting in the "Mathemtical Duel" as well as pupils who are not attending a special mathematical course is investigated.

Based on the findings of the survey, further conclusions are drawn as to which aspects appear to be particularly important when solving problems within the field of mathematics education.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei jenen Personen und Organisationen bedanken, die mich beim Verfassen dieser Diplomarbeit unterstützt haben.

Zu allererst danke ich meinem Betreuer Ao.Univ.-Prof. Dr.phil. Bernd Thaller für die Möglichkeit, diese Diplomarbeit zu verfassen, sowie die gute Betreuung und die konstruktiven Gespräche.

Ein großer Dank gebührt der Administration und Leitung des BRG Kepler, an dem ich die Befragung einer Schülergruppe vornehmen durfte, ebenso wie den Schülerinnen und Schülern, die daran teilnahmen. Selbiges gilt für das Organisationsteam und die Teilnehmerinnen und Teilnehmer des Wettbewerbs „Mathematical Duel", die die Testung der anderen Gruppe ermöglichten. Besonders bedanken möchte ich mich an dieser Stelle bei Lukas Andritsch, der mir bei der Organisation der Befragungen half und stets mit Rat und Tat zur Seite stand.

Für die finanzielle Unterstützung für die Befragung bedanke ich mich ebenfalls bei den Organisatoren des Wettbewerbs „Mathematical Duel", der von Erasmus+ gefördert wird.

Besonderer Dank gebührt meiner Tante für sprachliche Ratschläge und Rückmeldungen, sowie meinem Bruder Manuel, der sich als guter Berater in mathematischen Belangen erwies. Er und einige Freundinnen und Freunde testeten die Befragungen vorab und gaben Rückmeldungen zur Aufgabengestaltung und wiederum andere halfen mir bei der Erstellung der englischen Version der Befragung – auch dafür möchte ich mich bedanken!

Meinen Eltern gebührt der abschließende Dank, denn sie haben mir das Studium ermöglicht und mich von Anfang an in meinen Vorhaben unterstützt – so auch bei dieser Diplomarbeit.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Leonardo da Vinci wird der Ausspruch „Die meisten Probleme entstehen bei ihrer Lösung“ zugeschrieben (Gute Zitate, online). Wer Probleme beim Problemlösen hat, dem kann dies auch tatsächlich so ergehen. Und auch jene, die Problemlösen können, werden bemerken, dass es bei der Lösung eines übergeordneten Problems immer wieder kleinere oder größere untergeordnete Probleme zu lösen gilt.

Schon beinahe traditionell erscheint die Schlagzeile, dass Österreich beim PISA-Test, der auch Problemlösekompetenzen testet, schlecht oder mittelmäßig abschneidet. Es gibt viele Versuche, den Unterricht zu verbessern, und dazu würde auch das vermehrte Problemlösen zählen. Dazu müssen die Schülerinnen und Schüler lernen, Ideen zu finden und Strategien anzuwenden, um selbst ein Problem lösen zu können.

Das übergeordnete Ziel dieser Diplomarbeit ist es, herauszufinden, welche Lösungsstrategien interessierte und begabte Schülerinnen und Schüler verfolgen und wie man Problemlösen fördern kann. Welche Strategien wenden wettbewerbserprobte Schülerinnen und Schüler an und wie gehen jene an solche Aufgaben heran, die keine besondere Übung im Problemlösen haben?

In weiterer Folge bezeichne ich jene getesteten Schülerinnen und Schüler, die an Mathematik-Olympiade-Kursen und Wettbewerben teilnehmen, als „Gruppe α“ und diejenigen, die lediglich zu den „stärkeren“ in Mathematik gehören, aber keine Kurse oder ähnliches besuchen, mit „Gruppe β“.

Zusätzlich werden die Schülerinnen und Schülerinnen in drei Altersstufen unterteilt, die jenen des Wettbewerbs „Mathematical Duel“ entsprechen: In Kategorie C sind Schülerinnen und Schüler der Klassen 3 und 4, Kategorie B sind aus der 5. und 6. Klasse und A sind die Ältesten, die aus der 7. und 8. Klasse kommen.

Es wird versucht, eine Möglichkeit zu finden, Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht an das Problemlösen heranzuführen und dieses auch als Mittel zur Differenzierung und Individualisierung im Unterricht zu verwenden. Natürlich sollten im Mathematikunterricht die Problemlösekompetenzen aller Schülerinnen und Schüler gefördert werden, doch das Augenmerk liegt in dieser Arbeit auf den Begabten und Interessierten.

Mittels der gestellten Aufgaben möchte ich herausfinden, wie sich die Lösungsstrategien der Schülerinnen und Schüler aus Gruppe α sich von jenen aus Gruppe β unterscheiden. Daraus ergibt sich die Frage, ob beziehungsweise wie man im regulären Mathematikunterricht solche Strategien vermitteln kann, die wahrscheinlich die wettbewerbserprobten Schülerinnen und Schüler besser beherrschen. Dabei gilt es auch zu überlegen, ob der etwaige Vorteil der Gruppe α aus Übung und Gewohnheit resultiert oder ob spezielle Inhalte ihnen diesen Vorteil verschaffen.

Eine weitere Frage ist, ob es nach dem Bearbeiten der Aufgaben Unterschiede in der Selbsteinschätzung zwischen den beiden Gruppen gibt.

Zusätzlich zu diesen Fragen sind auch einige persönliche Angaben der Schülerinnen und Schülern interessant: Lösen sie gerne Probleme? Mögen sie den „normalen" Mathematikunterricht? Mögen sie die Mathematik an sich? Sind sie im Regelunterricht in Mathematik unterfordert? Haben sie Prüfungs- oder Wettbewerbsangst?

Die Befragung der Schülerinnen und Schüler besteht aus einem schriftlichen und einem mündlichen Teil, sie wird jedoch im Zuge dieser Arbeit noch genauer erklärt.

Diese Diplomarbeit ist in drei große Teile gegliedert. In Teil I, dem theoretischen Teil, findet man Informationen aus der Literatur zum gestellten Thema. Darin wird das Problemlösen behandelt, Begriffe erklärt und überblicksmäßig gezeigt, wie Problemlösen im Mathematikunterricht in der Literatur behandelt wird. Anschließend werden Begriffe wie Kompetenzen und Bildungsstandards erläutert und untersucht, inwieweit Problemlösekompetenz im Unterricht wie auch bei der standardisierten Reifeprüfung erforderlich ist. Weitere Begriffe wie Interesse, Motivation und Begabung werden definiert, bevor ein Überblick über mathematische Wettbewerbe in Österreich gegeben wird.

In Teil II, dem praktischen Teil der Diplomarbeit, wird der Aufbau der Befragung zuerst erklärt und anschließend die Lösungen der Schülerinnen und Schüler analysiert, wobei jede Gruppe zuerst einzeln betrachtet wird und anschließend Unterschiede aufgezeigt und Vergleiche angestellt werden.

Teil III beinhaltet Folgerungen aus der Befragung sowie Umsetzungsmöglichkeiten vom Problemlösen im Mathematikunterricht.

Teil I

Theoretischer Teil

2 Problemlösen

In diesem Kapitel geht es darum, den Begriff des Problemlösens zu definieren und zu untersuchen, wie in der Literatur das Thema Problemlösen im Mathematikunterricht bereits behandelt wurde.

2.1 Definition des Begriffs Problemlösen

Büchter und Leuders definieren ein Problem bzw. eine Problemlöseaufgabe als eine Aufgabe, deren Lösung nicht sofort ersichtlich ist. Somit fordert Problemlösen einen kreativen Gedankengang, um bekannte Lösungsstrategien und Verfahren zu kombinieren und mit neuen Ideen zu verknüpfen. Jedoch muss beachtet werden, dass ein und dieselbe Aufgabe für manche eine Problemlöseaufgabe darstellt, während sie für andere lediglich eine Reproduktionsaufgabe ist – wenn beispielsweise noch keine Kenntnisse in bestimmten Gebieten der Mathematik vorhanden sind, können trotzdem viele Aufgaben durch individuelle Überlegungen gelöst werden.
Nach dieser Definition sind allerdings Modellierungsaufgaben auch Problemlöseaufgaben. (Büchter & Leuders, 2009, S. 28ff)

Problemlösen kann laut Büchter und Leuders auch als verwandter Begriff des Modellierens beschrieben werden, allerdings ist „in diesem Sinne das Problemlösen ein Teilschritt des Modellierens“ (Büchter & Leuders, 2009, S. 30). Beim Modellieren wird eine Realsituation beschrieben, aus deren Fragestellung zuerst ein mathematisches Modell aufgestellt werden muss, was man als „mathematisieren“ bezeichnen kann, ehe das mathematische Problem mathematisch gelöst wird. Die Lösung dieses Problems muss anschließend wieder in die reale Situation übertragen werden. (Büchter & Leuders, 2009, S. 18ff)

Ein Problem wird umgangssprachlich als etwas schwierig zu Bewältigendes bezeichnet, und dies gilt im übertragenden Sinne auch für den mathematischen Kontext. Also ist Problemlösen mit dem Finden und Erfinden von Methoden und Ideen zum Finden einer Lösung von (individuell) schwierigen Aufgaben verknüpft. (Bruder & Collet, Problemlösen lernen im Mathematikunterricht, 2011, S. 11, 14)

Um eine Aufgabe als Problem bezeichnen zu können, bedarf es vor allem der Offenheit (Büchter & Leuders, 2009, S. 29f). Das bedeutet, dass verschiedene Lösungsansätze, Ideen und Interpretationen willkommen sind und nicht ein einziger Weg als der richtige gilt.

Pólya verwendet anstelle des Begriffs des „Problems“, wie er eben erläutert wurde, stets den Ausdruck „Aufgabe“, wobei er die gleichen Ansprüche an eine Aufgabe stellt wie die früher erwähnten Autoren an ein Problem: eine Aufgabe ist in seinem Betrachten etwas Schwieriges, dessen Lösungsweg erst gesucht werden muss und nicht von vorn herein auf der Hand liegt. (Pólya, Vom Lösen mathematischer Aufgaben: Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren, 1966, S. 173)

In dieser Arbeit wird der Begriff des Problemlösens wie in den eben beschriebenen Definitionen verwendet, wobei Aufgabe eine „allgemeine Aufgabenstellung“ bezeichnet, daher also sowohl eine Routineaufgabe als auch eine Problemlöseaufgabe sein kann.

Die Aufgaben, die für die Befragung der Schülerinnen und Schüler ausgewählt wurden, und die im Laufe dieser Arbeit noch genauer erklärt werden, stimmen auf den ersten Blick möglicherweise nicht gänzlich mit allen Definitionen überein, da es mehrfach darum geht, einen eigenen möglichst einfachen Weg zu finden statt jenem, der auf den ersten Blick ersichtlich wäre. Somit erscheinen manche Aufgaben nicht als Problem, jedoch werden sie zu einer Problemlöseaufgabe, sobald erkannt wird, dass es mehrere Wege geben kann. Es müssen also verschiedene Lösungsstrategien entwickelt und kombiniert werden. Allerdings gibt es meistens verschiedene Möglichkeiten, welche verschieden deutlich ersichtlich sind. Außerdem stellen manche Aufgaben, wie auch bei Büchter und Leuders (2009) beschrieben, für gewisse Schülerinnen und Schüler eine Routineaufgabe dar, während sie für andere eine Problemlöseaufgabe ist, da sie die Routine oder die benötigten mathematischen Fähigkeiten nicht besitzen.

2.2 Die vier Phasen nach Pólya

Pólya hat vier Phasen des Problemlösens definiert:

In der ersten Phase geht es darum, die Aufgabe zu verstehen. Dabei sollte dem oder der Problemlösenden bewusst sein, was gegeben und was unbekannt ist und wie etwaige Bedingungen lauten. Außerdem können bereits in dieser Phase mathematische Bezeichnungen eingeführt werden (Pólya, 1949, S. 20). Dabei kommt das „Vertrautwerden mit der Aufgabe“, bei dem es um das Erfassen der Aufgabe als Ganzes und nicht um Details geht, vor dem „Erarbeiten eines besseren Verständnisses“, bei dem das Erkennen und Ordnen der Einzelheiten wichtiger ist (Pólya, 1949, S. 48).

Die zweite Phase ist das „Ausdenken eines Plans“, die Pólya (1949) als die entscheidende Phase beim Lösen eines Problems betrachtet, da das Finden oder Ausdenken einer Idee oft schwierig ist. Hilfreich dabei ist das Wissen, das man sich beim Lösen anderer Aufgaben angeeignet hat, daher sollte man sich immer wieder an bereits gelöste Aufgaben erinnern und die aktuelle mit diesen vergleichen. Dabei geht es darum, die gesuchte Strategie möglicherweise von einer Idee abzuleiten, die beim Lösen einer Aufgabe mit ähnlichen oder selben Unbekannten hilfreich war. Sollte keine ähnliche Aufgabe gefunden werden können, kann es hilfreich sein, selbst eine ähnliche Aufgabe lösen zu versuchen, indem man einen Spezialfall, eine allgemeinere Aussage oder eine Variation der eigentlichen Aufgabe findet. Mit Hilfe solcher Zwischenschritte kann man dann durch Hinzufügen oder Weglassen einiger Bedingungen wieder zur gestellten Aufgabe zurückkehren. (Pólya, 1949, S. 22ff)

In der dritten Phase soll dann der zuerst ausgedachte Plan durchgeführt werden. Dabei ist es wichtig, jeden einzelnen Schritt konzentriert auszuführen und zu überprüfen, um Fehler zu vermeiden. (Pólya, 1949, S. 50f)

Ein Verstehen und Durchschauen des Plans ist für diese Phase unbedingt erforderlich. Genau dieses Verstehen und Verinnerlichen des Plans ist in der Schule oftmals die Schwierigkeit. Die Lehrperson muss dafür sorgen, dass die Schülerinnen und Schüler ihre eigenen Pläne erarbeitet und verinnerlicht haben und nicht beispielsweise die Idee der Lehrperson nur nachvollziehen, denn dadurch kann es passieren, dass die Idee vergessen wird. (Pólya, 1949, S. 26f)

Die Rückschau ist die vierte und letzte Phase bei Pólya. Dabei soll einerseits die erhaltene Lösung erneut kontrolliert und von mehreren Seiten betrachtet werden. Eventuell kann der Lösungsweg auch verändert werden, wenn man beispielsweise einen einfacheren oder kürzeren Weg findet. Andererseits soll darüber nachgedacht werden, ob man die Strategie oder den Plan für andere Aufgaben brauchen könnte, was die Fähigkeit zum Problemlösen im Allgemeinen verbessert; daher darf auf die abschließende Reflexion nicht verzichtet werden. (Pólya, 1949, S. 28f, 51)

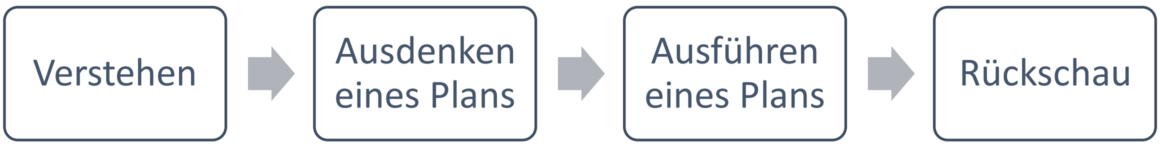


Abbildung 1: Die vier Phasen nach Pólya

2.3 Heuristik und Heurismen – Problemlösen lernen

Das Wort Heuristik kommt vom griechischen Wort heuriskein, was auf Deutsch „finden“ oder „entdecken“ bedeutet (Duden, online). Im Duden findet man den Begriff der Heuristik als „Wissenschaft von den Verfahren, Probleme zu lösen“ (Duden, online), auch Pólya beschreibt das Ziel der Heuristik als Finden von „Methoden und Regeln von Entdeckung und Erfindung“ (Pólya, 1949, S. 118f).

Sucht man im Duden nach „Heureka“ findet man folgende Wortbedeutung: „freudiger Ausruf, besonders bei der Lösung eines schwierigen Problems:“ (Duden, online)
Der Legende nach stammt der Ausdruck Heureka von Archimedes, der „heureka“ rief, als er eine Überprüfungsmöglichkeit für die Beschaffenheit eines Goldkranzes gefunden hatte (Bruder, 2002, S. 5, zitiert nach Bruder & Collet, 2011, S. 34).

Ein solcher Heureka-Effekt tritt beim Problemlösen auf, wenn man ein Problem erfolgreich gelöst hat. Derartige Erfolgserlebnisse fördern das Selbstbewusstsein bezüglich der eigenen Problemlösekompetenz und lassen einen darauf folgende Probleme mit mehr Sicherheit und Zuversicht betrachten (Bruder & Collet, Problemlösen lernen im Mathematikunterricht, 2011, S. 35).

Um den Schülerinnen und Schülern solche Heureka-Effekte ermöglichen zu können, müssen ihnen bewältigbare Probleme gestellt werden, um sie nicht zu entmutigen (Bruder & Collet, Problemlösen lernen im Mathematikunterricht, 2011, S. 35).

Was man den Schülerinnen und Schülern beibringen kann, sind „Heurismen, das sind heuristische Prinzipien, Regeln, Strategien und Hilfsmittel“ (Bruder & Collet, 2011, S. 36).

Pólya erwähnt oftmals in seinen Analysen über Lösungsverfahren das Descartessche Schema. Dabei sollte man zuerst jedes Problem auf ein mathematisches Problem, dieses dann auf ein algebraisches und dieses wiederum auf die Lösung einer einzigen Gleichung reduzieren. Dieses Verfahren funktioniert nicht für jedes Problem, doch ist es für zumindest viele Probleme anwendbar, vor allem für einfachere, wie sie in der Schule oft gestellt werden. (Pólya, 1966, S. 47f)

Für ein und dasselbe Beispiel sind oft mehrere Lösungsstrategien möglich. Auch im Unterricht sollte besonders darauf Wert gelegt werden, dies deutlich zu machen.

Pólya nennt ein anschauliches Beispiel mit verschiedenen Strategien. „Ein Bauer hat Hühner und Kaninchen. Diese Tiere haben zusammen 50 Köpfe und 140 Füße. Wie viele Hühner und wie viele Kaninchen hat der Bauer?“ (Pólya, 1966, S. 48)

a) „Tasten“ / „sukzessive Approximation“: Durch geschicktes Ausprobieren und Überlegen kommt man auf die Lösung. In diesem Fall schätzt man einen Wert, berechnet dann die Anzahl der Füße und bemerkt, ob man zu viele Füße hat. In diesem Fall muss man im nächsten Schritt die Anzahl der Hühner im Verhältnis erhöhen. Hat man zu wenig, so erhöht man die Anzahl der Kaninchen. Probiert man zum Beispiel mit je 25 Hühnern und Kaninchen, erhält man 150 Füße. Das sind zehn Füße zu viel, folglich müssen es weniger Kaninchen und mehr Hühner sein. Durch gutes Überlegen oder nochmaliges Probieren erhält man also 20 Kaninchen und 30 Hühner. Diese Methode scheint zwar in der Mathematik oft verpönt zu sein, allerdings sollten Schülerinnen und Schüler im Unterricht auch diese Art der Lösungsfindung anwenden dürfen. Allerdings hat die Lehrperson die Aufgabe, darauf hinzuweisen, dass in komplizierteren Fällen eine allgemeinere Methode effizienter ist.

b) „Eine gute Idee“: Dazu gehört weniger Probieren und mehr Überlegen als beim Tasten. Man könnte sich beim oben genannten Beispiel eine Situation vorstellen, in der alle Tiere die Hälfte ihrer Beine heben. Jedes Huhn steht also auf einem Bein und jedes Kaninchen auf zwei. Also bleiben insgesamt noch 70 Beine am Boden, wobei zu jedem Hühnerkopf ein Bein gehört und zu jedem Kaninchenkopf zwei Beine. Zieht man also von den 70 Beinen die Anzahl der Tierköpfe, 50, ab, so erhält man die Anzahl der Kaninchen, die ja „ein Bein mehr als der Kopf“ am Boden haben. Folglich gibt es 20 Kaninchen und 30 Hühner.

c) „Mit Algebra“: Diese Methode beruht auf dem Descartesschen Schema. Man reduziere das Problem auf ein algebraisches Problem. Dies ist auch oft ein wichtiger Schritt im Unterricht. Die unbekannte (gesuchte) Anzahl von Hühnern bezeichne man mit x, jene der Kaninchen mit y. Die Anzahl der Köpfe entspricht der Gleichung $x + y = 50$. Die 140 Füße setzen sich aus den paarweisen Füßen der Hühner und den jeweils vier Kaninchenfüßen zusammen, also $2x + 4y = 140$. Diese zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten sind einfach zu lösen, man erhält $x = 30$ und $y = 20$. Was dabei beachtet werden muss ist, dass alle Daten und Bedingungen in die aufgestellten Gleichungen eingeflossen sind.

d) „Verallgemeinerung“: Dies ist eine Methode, die in der Schule wohl nur wenige Schülerinnen und Schüler von sich aus anwenden werden, wenn nicht dezidiert danach gefragt wird. Dabei ersetzt man die gegebenen Zahlen auch durch Variablen (hier zum Beispiel die 50 durch k und die 140 durch f) und verfährt wie beim vorherigen Schema, sodass man am Ende jede gesuchte Größe in Abhängigkeit der anderen ausdrücken kann, wie im genannten Beispiel $y = \frac{f}{2} - k$ und $x = k - y$. Betrachtet man die Formel zur Berechnung der Anzahl der Kaninchen, so erkennt man, dass sie die „gute Idee“ von oben allgemein ausdrückt.

(Pólya, 1966, S. 48ff)

Eine genaue Übersicht über Heurismen geben Bruder und Collet (2011).

- Heuristische Strategien:
  - „Systematisches Probieren“: Im Unterschied zum reinen Herumprobieren braucht man für systematisches Probieren gewissen Überlegungen, nach welchen Mustern probiert wird und welche Schlüsse daraus gezogen werden können. Dass systematische Probieren eigenet sich oft dann, wenn einem keine andere Strategie einfällt. Durch das Probieren bekommt man ein Gefühl für die Aufgabe und deren Lösung und versteht das eigentliche Problem danach möglicherweise besser. Eine wichtige Rolle spielt das systematische Probieren auch bei Beweisaufgaben. Um eine Fragestellung genauer formulieren zu können oder ein Gegenbeispiel zu finden, eignet sich oft geschicktes Probieren.
  - „Vorwärtsarbeiten“: Dabei „betrachtet der Problemlöser zunächst das Gegebene und versucht davon ausgehend das Gesuchte zu erreichen“ (Bruder & Collet, 2011, S. 76). Das bedeutet, dass man sich überlegt, was aus den gegebenen Daten und Bedingungen gefolgert werden kann. Die Überlegung besteht also hauptsächlich darin, welcher Schritt der jeweils nächste sein kann.
  - „Rückwärtsarbeiten“: Dies ist zwar beinahe das Gegenteil vom Vorwärtsarbeiten, allerdings sind die Denkstrategien einander durchaus ähnlich. Beim Rückwärtsarbeiten geht es darum, vom Gesuchten auf Zwischenschritte zu kommen, von denen auf das Gesuchte geschlossen werden kann.

Anschließend versucht man, möglicherweise mit mehreren weiteren Zwischenschritten, vom Gegebenen auf diesen Zwischenschritt zu kommen.

- „Analogieschluss“: Dabei überlegt man, ob es bereits ähnliche (analoge) Probleme gab, die man bereits einmal gelöst hat, und ob deren Lösungsidee auf das aktuelle Problem angewandt werden kann. Wichtig dabei ist herauszufinden, welche Ähnlichkeiten zwischen den beiden Problemen bestehen und welche Analogien sich daher im Lösungsweg ergeben. Bei vielen Problemlöseaufgaben ist ein Analogieschluss oft nicht möglich, da eine Problemlöseaufgabe nicht so gestellt sein sollte, dass sofort auf eine Lösungsstrategie geschlossen werden kann. Dennoch gibt es viele Zwischenschritte und Verbindungen zu anderen Aufgaben, die Analogieschlüsse möglicherweise in Teilschritten ermöglichen.
- „Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes“: Dabei kommt es hauptsächlich darauf an, das gegebene Problem so zu vereinfachen oder in Teilaufgaben zu zerlegen, dass Teilprobleme entstehen, die sich durch Analogieschlüsse lösen lassen.

(Bruder & Collet, 2011, S. 68ff, 186ff)

- Heuristische Hilfsmittel:
  - „Informative Figuren“ / „Skizze“: Dabei geht es darum, möglichst viele gegebene Informationen in einer geeigneten Darstellung auszudrücken und zu visualisieren, um das Problem verständlicher zu machen und den Lösungsweg besser zu erkennen.
  - „Tabellen“: Tabellen können der Stukturierung und Veranschaulichung dienen, auch als Hilfe beim stukturierten Probieren, um einen Überblick zu geben. Mehrere Möglichkeiten, Versuche oder Berechnungen stehen geordnet und übersichtlich in einer Tabelle.
  - „Wissensspeicher und umstrukturierte Wissensspeicher“: Ein Wissensspeicher kann wie ein allgemeines Formelheft gesehen werden. Darin können nicht nur mathematische Inhalte verzeichnet sein, sondern auch Stichworte und dazu gehörende Informationen. Im Speziellen können zum Beispiel Heurismen so notiert werden, dass beim Betrachten des Wissensspeichers Ideen für mögliche Lösungsstrategien gefunden werden. In einem umstrukturierten

Wissensspeicher geht es darum, „mathematische Zusammenhänge einerseits nach ihren Voraussetzungen zu sortieren und andererseits nach ihren Behauptungen“ (Bruder & Collet, 2011, S. 62). Darin werden alle Inhalte aufgelistet, die man zu einem bestimmten Thema bereits gelernt hat, um bei der Lösung eines Problems zu diesem Thema einen Überblick über mathematische Zusammenhänge zu bekommen und auf sie zurückgreifen zu können.

- „Lösungsgraphen“: Ein Lösungsgraph ähnelt einer Mindmap, in der alles Gegebene und Gesuchte eingezeichnet wird und Zwischenschritte und Schlüsse notiert werden. Dadurch verschafft man sich einen Überblick über die einzelnen Lösungsschritte und erkennt auf einen Blick, welche Zwischenschritte noch fehlen. Vor allem bei Problemen, die einen mehrschrittigen Lösungsweg erfordern, sind Lösungsgraphen eine große Hilfe.

(Bruder & Collet, 2011, S. 45ff)

- Heuristische Prinzipien: Collet und Bruder (2011) erklären einige für sie im Mathematikunterricht immer wiederkehrende Prinzipien, die oft gebraucht werden, wenngleich in der Literatur teilweise eine andere Kombination an heuristischen Prinzipien erwähnt wird.
  - „Zerlegen und Ergänzen“: Bei Problemen im Mathematikunterricht ist es oft sinnvoll, Flächen in Teilflächen zu zerteilen (oder zu einer anderen Fläche zu ergänzen), wenn man diese entstandenen Flächen leichter bearbeiten oder berechnen kann. Doch kann man auch ganze Probleme oder Lösungen zerteilen, wie beispielsweise bei einer Fallunterscheidung, um die entstandenen Teile verstehen und lösen zu können.
  - „Fallunterscheidungen“: Fallunterscheidungen gibt es sowohl in der Geometrie als auch in der Arithmetik und zerlegen ein Problem oder eine Lösung systematisch in mehrere Fälle.
  - „Invarianzprinzip“: Dabei geht es darum, zu erkennen, ob es Gemeinsamkeiten in gegebenen Informationen gibt und ob man eine Konstante konstruieren kann. Hat man dies erkannt, kann man mit unterschiedlichen Strategien fortfahren. Oftmals eignet sich auch systematisches Probieren, da gewisse Gemeinsamkeiten bereits herausgefunden wurden.

- „Extremalprinzip“: Das Extremalprinzip entspricht manchmal dem „gesunden Menschenverstand“, der einem gewisse Einschränkungen vorgibt, durch die das Problem erleichtert wird. Schließt man im Vornherein durch einige Randbedingungen darauf, dass sich die Lösung in einem bestimmten Bereich befinden muss, so ist das Lösen danach einfacher, da man sich nur auf diesen Bereich konzentrieren muss.
- „Symmetrieprinzip“: Dabei geht es um „das Suchen nach Symmetrien (Identitäten, Musteranalogien) zwischen den Elementen der durch die Problemstellung gegebenen Informationsmenge“. (Bruder & Collet, 2011, S. 100)
- „Transformationsprinzip“: Dabei überträgt man das Problem in eine (andere) mathematische Schreibweise, betrachtet das Problem in unterschiedlichen Zusammenhängen und Voraussetzungen und verknüpt es mit Neuem. Durch diese Veränderung des eigentlichen Problems erhält man ein anderes Problem, das möglicherweise einfacher zu lösen ist.

(Bruder & Collet, 2011, S. 87ff)

- Heuristische Regeln: Pólya hat einige Richtlinien für das Problemlösen aufgestellt. Eine allgemeine Möglichkeit, mit der man alle Probleme lösen kann, gibt es nicht, jedoch gibt es einige Richtlinien, die beim Lösen oft helfen können. Pólya gibt grundsätzliche Regeln an, wie man sich beim Problemlösen verhalten kann. Dazu gehört, dass man möglichst nahe am Problem bleibt und sich dennoch so weit entfernt, dass mögliche Zwischenschritte erkannt werden können. Des Weiteren sind Durchhaltevermögen und Beachten gewisser „Vorrangregeln“ wichtig. Bei Letzterem geht es darum, bei zwei gleich effizient wirkenden Lösungswegen jenem den Vorrang zu geben, der für einen selbst einfacher ist. Vorrangregeln gibt es auch in anderen Zusammenhängen; man sollte unter anderem den Hauptteilen einer Aufgabe den Vorrang geben, die Aufgabe also als Ganzes sehen und sie zuerst zu verstehen versuchen, ehe man sie in Teilaufgaben unterteilt, sowie jenen Lösungswegen Vorrang geben, die einem beim Lösen anderer Probleme bereits geholfen haben und jene Hilfsaufgaben bearbeiten, die möglichst nahe am eigentlichen Problem sind. (Pólya, 1964, S. 8ff)

All die eben erwähnten Heurismen können im Unterricht durch beispielhafte Aufgaben erläutert werden. Die Schülerinnen und Schüler sollten dann zuerst das Problem verstehen, ehe sie überlegen, welche Methoden sich für das Lösen des Problems eignen. Nach dem Lösen des Problems dienen Fragen wie „Welche Inhalte waren notwendig, um das Problem zu lösen?“, „Welche Strategien haben uns bei der Lösung geholfen?“ oder „Gibt es andere Lösungswege und wäre ein anderer Weg einfacher?“ der Reflexion und erleichtern langfristig das Finden von Lösungswegen, wenn Analogien gefunden werden können. (Bruder & Collet, 2011, S. 114ff)

2.4 Problemlösen im Unterricht

Pólya schreibt im Vorwort seines Buches „Schule des Denkens“ (1949):

> So hat der Lehrer der Mathematik eine große Chance. Wenn er die ihm zur Verfügung stehende Zeit damit ausfüllt, seine Schüler in eingeübte Verfahren zu drillen, mindert er ihr Interesse und hemmt ihre geistige Entwicklung; dann nutzt er seine Chance schlecht. Aber wenn er den Wissensdrang seiner Schüler weckt, indem er ihnen Aufgaben stellt, die ihren Kenntnissen angepaßt sind, und ihnen durch geschickte Fragen hilft, die Aufgaben zu lösen, so wird er den Geschmack an selbstständigem Denken in ihnen entwickeln und ihnen Wege dazu aufzeigen. (Pólya, 1949, S. 7)

2.4.1 Problemlöseaufgaben im Mathematikunterricht

Viele Aufgaben, die in Schulbüchern gestellt werden, treffen auf die Definition des Problemlösens nicht zu. Beispielsweise wird an dieser Stelle das Kapitel des Cosinussatzes im Schulbuch „Mathematik verstehen 5“ angegeben. Hierbei wird der Cosinussatz mit Hilfe einer Aufgabe erklärt, der Satz allgemein formuliert und anschließend werden nach zwei vorgerechneten Aufgaben einige Grundaufgaben sowie weiterführende Aufgaben gestellt (Malle, Ramharter, Ulovec & Kandl, 2005, S. 99ff). All diese Aufgaben können nicht als Problemlöseaufgaben bezeichnet werden, da durch die Überschriften schon klar wird, welche Strategie mit Sicherheit angewandt werden kann – in diesem Fall sollte also jedes Beispiel mit dem Cosinussatz lösbar sein, was jedoch nicht heißt, dass es nicht auch andere Lösungswege geben kann. Solche Aufgaben können als Routineaufgaben bezeichnet werden.

Im Unterschied zu dieser 2005 erschienenen Ausgabe gibt es in „Mathematik verstehen 5“ aus dem Jahr 2013, das für die zentrale Reifeprüfung vorbereiten sollte, einige Aufgaben, in denen ausdrücklich nach einer Begründung gefragt wird. Zwar ist es immer noch vorhersehbar, dass Aufgaben im Kapitel „Cosinussatz“ mit Hilfe eben dieses berechnet werden können, allerdings gibt es Fragestellungen, die nicht gleich darauf hinweisen, beispielsweise folgende: „Begründe, warum es zu den Angaben a = 6,5 cm, b = 2,0 cm, c = 9,0 cm kein Dreieck gibt!“ (Malle, et al., 2013, S. 118) Dies ist ein Schritt dahin, weg von den sogenannten geschlossenen Aufgaben zu gehen und Wert auf Begründung und Argumentation zu legen.

Durch das häufige Auftreten geschlossener Aufgaben im Mathematikunterricht entsteht der Eindruck bei den Schülerinnen und Schülern, dass es im Mathematikunterricht rein darum gehe, Aufgaben mit einem gewissen Vorrat an Verfahren zu bearbeiten. Dabei müsse nicht reflektiert werden, mit welchen Ideen die Aufgabe gelöst werden kann und weswegen sie gelöst werden soll. (Büchter & Leuders, 2009, S. 89f)

Büchter und Leuders (2009, S. 35) geben das Öffnen von Aufgaben als eine Möglichkeit an, um Problemlöseaufgaben für den Unterricht zu erzeugen. Dabei kann man oft Routineaufgaben umkehren und erhält eine Problemlöseaufgabe, deren Lösungsweg und Ergebnis verschieden sein können.

Doch das Einbinden von Problemen in den Mathematikunterricht ist auch noch mit anderen Möglichkeiten realisierbar. Beispielsweise können Begriffe hergeleitet werden, indem man eine Aufgabe stellt, in der die Schülerinnen und Schüler auf die jeweiligen Eigenschaften des Begriffs kommen sollen. Eine weitere Möglichkeit wäre, die Probleme selbst von den Schülerinnen und Schülern entwickeln zu lassen. (Büchter & Leuders, 2009, S. 32ff)

Pólya (1966, S. 176ff) unterscheidet bei Problemlöseaufgaben (in seinen Büchern, wie bereits erwähnt, nur „Aufgaben“ genannt) zwischen Bestimmungsaufgaben und Beweisaufgaben. Bei Bestimmungsaufgaben geht es darum, die Unbekannte der gestellten Aufgabe zu bestimmen, wobei die gegebenen Voraussetzungen in der Angabe, also Daten und Bedingungen, zu berücksichtigen sind. Diese Unbekannte kann jeglicher Art sein. Pólya (1949, S. 66) nennt die Unbekannte auch „verlangte oder gesuchte Größe“ und gibt als anschauliches Beispiel einen Detektivroman an, dessen Unbekannte der Mörder ist.

Im Gegensatz dazu muss bei einer Beweisaufgabe eine gegebene Aussage durch logisches Schließen bewiesen oder gegebenenfalls widerlegt werden. Dabei muss meist erst entschieden werden, ob sie bewiesen oder widerlegt werden muss, daher wird sie auch als Entscheidungsaufgabe bezeichnet. Bei mathematischen Sätzen sind meistens Behauptungen zu beweisen oder zu widerlegen, die aus einer oder mehrerer Voraussetzungen sowie der daraus folgenden Behauptung bestehen. Diese beiden werden Hauptteile der Aufgabe genannt. Bei einem Beweis geht es darum, zu zeigen, dass aus den Voraussetzungen zwingend die Behauptung folgt, wohingegen bei der Widerlegung meist ein Gegenbeispiel gesucht wird, bei dem die Behauptung nicht aus der Voraussetzung folgt. (Pólya, 1966, S. 179)

Kratz definiert einen dritten Problemtypen, die Entdeckungsaufgabe. Dabei geht es darum, etwas Neues zu entdecken, sei es, neue Probleme aufzustellen oder neue Gesetzmäßigkeiten und Interpretationen zu finden. (Kratz, 1988, zitiert nach Bruder, Hefendehl-Hebeker, Schmidt-Thieme & Weigand, 2015, S. 281)

Als Hilfsmittel zur Lösung von Problemen können Fragen dienen, die sich Schülerinnen und Schüler beim Problemlösen stellen können. Bei Bestimmungsaufgaben fragt man sich zuerst, was gegeben und was unbekannt ist, danach, was aus den Daten schlussgefolgert werden kann und schlussendlich, ob man alle Daten und Bedingungen verwendet hat. Bei Beweisaufgaben sind die Fragen sehr ähnlich: zuallererst sollen die Annahme und der Schluss als solche erkannt werden, danach muss darüber nachgedacht werden, welche Schlussfolgerungen aus der Annahme gezogen werden können und am Ende muss sich die oder der Problemlösende fragen, ob die ganze Annahme benutzt wurde. (Pólya, 1949, S. 68f)

Zu relativ bekannten offenen Aufgabenstellungen im Mathematikunterricht gehören Fermi-Aufgaben. Sie gelten oftmals als Modellierungsaufgaben. Die wohl bekannteste dieser Aufgaben ist jene, bei der nach der Anzahl an Klavierstimmern in Chicago gefragt wird. Es sind in der Aufgabe meist keine weiteren Daten gegeben, doch bekannt ist die Form der Antwort – im Fall der Klavierstimmer wäre dies eine Zahl, die schätzungsmäßig der Anzahl der Klavierstimmer in Chicago entspricht. Bei Fermi-Aufgaben geht es nicht in erster Linie um den Rechenvorgang, sondern um geeignete Abschätzungen. Des Weiteren sind Fermi-Aufgaben hilfreich, um sich selbst Fragen stellen und heuristische Strategien anwenden zu lernen. (Borromeo Ferri, Kaiser & Greefrath, 2013)

2.4.2 Voraussetzungen zum Problemlösen im Mathematikunterricht

Abgesehen von den Aufgabentypen gibt es im Mathematikunterricht einiges zu beachten, um Problemlösen möglich zu machen. Dazu geben Büchter und Leuders (2009) einige Punkte an, die Voraussetzungen für Problemlösen im Unterricht darstellen, darunter unter anderem folgende:

- Man muss den Schülerinnen und Schülern genügend Zeit geben, um sich selbst mit dem Problemlösen beschäftigen zu können. Dabei sollte sogar auch eine fragend-entwickelnde Unterrichtsmethode vermieden werden, da es die Schülerinnen und Schüler daran hindert, individuelle Problemlöseansätze zu entwickeln.
- Problemlösen soll abseits von Leistungsdruck stattfinden, da dieser die Kreativität hemmt.
- Die Schülerinnen und Schüler sollen dazu animiert werden, ihre Ideen und Lösungswege zu reflektieren. Dadurch lernen sie selbst, welche Strategien zielführend waren und können sich mit ihren Mitschülerinnen und Mitschülern austauschen und verschiedene Möglichkeiten diskutieren.

(Büchter & Leuders, 2009, S. 42f)

Pólya (1949, S. 34ff) beschreibt, wie sich Lehrerinnen und Lehrer beim Umgang mit problemlösenden Schülerinnen und Schülern verhalten sollen. Sie können den Lernenden helfen, indem sie Fragen stellen, allerdings sollten diese Fragen zuerst möglichst allgemein formuliert sein und erst dann schrittweise spezifischer werden. Eine gute Hilfe ist zum Beispiel das Fragen nach ähnlich erscheinenden, bereits gelösten Aufgaben, wohingegen das Hinweisen auf konkrete Lösungswege zu vermeiden ist – sie lässt die Schülerin oder den Schüler nicht selbst entdecken, welche Idee zur Lösung führen könnte und bringt somit auch nichts für weitere Aufgaben. Wichtig ist, dass „der Schüler selbst einen möglichst großen Anteil an der Arbeit hat“ (Pólya, 1949, S. 35).

Ebenso wichtig für den Unterricht ist, dass die Schülerinnen und Schüler das Problem wirklich verstanden haben, ehe sie nach einem Weg suchen. An einer Lösung zu arbeiten, deren Problem dahinter man eigentlich gar nicht verstanden hat, ist nicht zielführend. Wenn Schülerinnen und Schüler die Aufgabe mit eigenen Worten formulieren und Daten und Bedingungen sowie die Unbekannte erkennen können, haben sie es verstanden. (Pólya, 1966, S. 56)

In einem Themenheft des Bundesinstituts Bifie zum Thema Problemlösen im Mathematikunterricht in der Volksschule werden einige Rahmenbedingungen genannt, die Voraussetzung für Problemlösen sind. Dazu sollen den Kindern zuerst Sachverhalte erklärt werden, sodass die Kinder dann mögliche Fragen zum Problem finden, sofern das Problem nicht konkret definiert ist. Danach können die Schülerinnen und Schüler selbst ihre eigenen Lösungsstrategien entwickeln, wobei es wichtig ist, dass sie seitens der Lehrperson nicht eingeschränkt werden. Anschließend besprechen die Schülerinnen und Schüler ihre Strategien miteinander, wobei sie einerseits ihre eigenen Lösungen noch vervollständigen oder andererseits die unterschiedlichen Strategien der Mitschülerinnen und Mitschüler kennenlernen können. (Fast, et al., 2013)

Diese Rahmenbedingungen für Volksschülerinnen und Volksschüler gelten größtenteils gleichermaßen auch für ältere Schülerinnen und Schüler, da sie dem Phasenmodell von Pólya ähnlich sind (siehe Kapitel 2.2).

2.4.3 **Ziele von Problemlösen im Mathematikunterricht**

„Man erzieht nicht zum Pionier, sondern zum Bürokraten, zum ängstlich am Schema klebenden braven Funktionär, zum armseligen Ersatz für eine Rechenmaschine, die – angesichts des Standes der heutigen Technik – alles besser machen könnte!“ (Denk, 1964, S. 39)

Schülerinnen und Schüler sollten in der Schule auf ihr späteres Leben vorbereitet werden. Nicht alle werden später die gleichen Anforderungen in Beruf und Alltag haben, so ist es unmöglich, jede Situation mathematisch vorzubereiten. Doch in der Schule können Grundkenntnisse und Strategien zur Vernetzung vermittelt werden, mit denen neu erscheinende Probleme gelöst werden können. (Bruder & Collet, 2011, S. 20)

Dazu sollte im Unterricht den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit geboten werden, selbst Problemlösestrategien zu entwickeln. Es muss jedoch darauf geachtet werden, die Schülerinnen und Schüler mit zu schwierigen Beispielen am Beginn nicht zu überfordern und zu demotivieren. Stattdessen sollten Wege aufgezeigt werden, wie man sich an schwierigere Probleme herantastet und diese schlussendlich auch lösen kann. (Bruder & Collet, 2011, S. 22)

Zum mathematischen Modellieren findet man als Ziele nicht nur Motivations- und Interessenssteigerung und Erkennen von Zusammenhängen zwischen der Mathematik und der „realen Welt“, sondern auch prozessorientierte Ziele, die auch den Zielen des Problemlösens entsprechen: „Förderung des Kommunizierens und Argumentierens“. (Borromeo Ferri, Kaiser & Greefrath, 2013, S. 20)

Als weiteres wichtiges Ziel des Mathematikunterrichts gilt das nachhaltige Erwerben von Kompetenzen. Oftmals wird zu repetitiv gelernt, das heißt, Aufgaben werden immer wieder wiederholt, um bestimmte Lösungsschemata einzuüben und es wird auswendig gelernt, anstatt verstanden. „Elaboratives“ Lernen hingegen zielt darauf ab, Inhalte zu erfassen und mit bereits Erlerntem zu vernetzen. Studien haben gezeigt, dass jene Schülerinnen und Schüler, die elaborativ lernen, deutlich mehr der Testaufgaben lösen konnten (und zwar durchschnittlich 5,2 von 8 statt 4,01 bei repetitiv Lernenden). Außerdem wiesen jene Schülerinnen und Schüler mit elaborativer Lernstrategie eine höhere intrinsische Lernmotivation auf. (BIFIE, 2011, S. 34f) Dem zu Folge sollen auch im Unterricht Aufgaben bearbeitet werden, die das elaborative Lernen fördern. Problemlöseaufgaben erfordern gerade das hier geforderte Vernetzen und fördern dieses in Folge auch. Folglich sind weitere Ziele des Problemlösens das nachhaltige Erfassen des Unterrichtsinhalts und die Förderung der Motivation.

Als grundsätzliches Ziel des Mathematikunterrichts nennt Pólya (1967, S. 153) das Denken, das die Lehrerin oder der Lehrer den Schülerinnen und Schülern beibringen soll. Das bedeutet, dass sie nicht nur Inhalte lernen sollten, sondern diese vernetzen und anwenden können. Welche Kunst dieses Lehren und Lernen ist, beschreibt Pólya als drei Prinzipien. Dazu zählen „Aktives Lernen“, „Beste Motivierung“ und „Aufeinanderfolgende Phasen“. Für die Lehrperson bedeutet das vor allem, den Schülerinnen und Schülern Zeit um Raum zum Denken und aktiven Arbeiten zu geben, die vermittelten Inhalte gut „verkaufen“ zu können und eine geeignete Mischung aus (Er-)Klären, Formalisieren (dabei werden Begriffe und Definitionen eingeführt) und Assimilieren (dabei gliedert sich der eben gelernte Inhalt in all das bereits Erlernte ein, Zusammenhänge werden hergestellt und Anwendungen wie Verallgemeinerungen sind möglich) zu finden. Gerade in der Phase der Assimilierung sollen Problemlöseaufgaben gestellt werden, die ein Verknüpfen und Anwenden erfordern und somit einen Beitrag zum Ziel „Denken“ leisten. (Pólya, 1967, S. 156ff)

3 Kompetenzen, Bildungsstandards und standardisierte Reifeprüfung

Bildungsstandards wurden eingeführt, um den Lernstand der Schülerinnen und Schüler vergleichbar zu machen. Sie geben an, welche Kompetenzen Schülerinnen und Schüler zu einem bestimmten Zeitpunkt der Schulausbildung aufweisen. Durch die Bildungsstandards soll auch Lehrerinnen und Lehrern ermöglicht werden, Schülerinnen und Schüler zu fördern, da durch die genauen Standards leichter erkennbar sein soll, in welchen Bereichen Aufholbedarf besteht. (BIFIE, Bildungsstandards, online)

Kompetenzen sind nach einer Definition Weinerts „kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösung in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können“ (Weinert, 2001, zitiert nach BIFIE: Bildungsstandards, online). Folglich sind Kompetenzen vergleichbar mit Zutaten, die man für die Zubereitung eines Gerichts braucht. In den österreichischen Bildungsstandards wird der Begriff der Kompetenz auch auf fachliche Inhalte ausgeweitet. Alle Kompetenzen zusammen sollen Schülerinnen und Schülern dazu verhelfen, „in variablen Situationen zu handeln und ihr Wissen zielgerichtet einsetzen zu können“. (BIFIE, Bildungsstandards, online)

Das Kompetenzmodell Mathematik für die 4. Schulstufe besteht aus allgemeinen und inhaltlichen Kompetenzen.

Die vier inhaltlichen Kompetenzen sind:

- Arbeiten mit Zahlen,
- Arbeiten mit Operationen,
- Arbeiten mit Größen sowie
- Arbeiten mit Ebene und Raum.

Die allgemeinen Kompetenzen sind

- Modellieren,
- Operieren,
- Kommunizieren und
- Problemlösen.

(BIFIE, Bildungsstandards, online)

Das Problemlösen unterteilt sich noch in zwei Teilkompetenzen, dem Stellen von mathematisch relevanten Fragen und dem Finden und Nutzen von Lösungsstrategien. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler „geeignete Lösungsaktivitäten wie Vermuten, Probieren, Anlegen von Tabellen oder Erstellen von Skizzen anwenden“ sowie „zielführende Denkstrategien wie systematisches Probieren oder Nutzen von Analogien einsetzen“ (BIFIE, Bildungsstandards für Mathematik, 4. Schulstufe, online).

Die Bildungsstandards Mathematik für die 8. Schulstufe sind um eine Dimension größer als jene der 4. Schulstufe. Zusätzlich zu Inhalt und Handlung kommt noch die Komplexität.

Zur Inhaltsdimension zählen

- Zahlen und Maße,
- Variablen, funktionale Abhängigkeiten,
- Geometrische Figuren und Körper sowie
- Statistische Darstellung und Kenngrößen.

Die mathematischen Handlungen sind

- Darstellen, Modellbilden,
- Rechnen, Operieren,
- Interpretieren und
- Argumentieren und Begründen.

Die Komplexitätsdimension besteht aus

- Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten,
- Herstellen von Verbindungen und
- Einsatz von Reflexionswissen, Reflektieren.

(BIFIE, Bildungsstandards für Mathematik, 8. Schulstufe, online)

Problemlösen findet keine direkte Erwähnung, wohl aber Elemente davon. Bei Darstellen und Modellbilden geht es darum, mathematische Sachverhalte zu erkennen, mathematisch darzustellen oder zu vereinfachen und bekannte Modelle anzuwenden oder neue zu entwickeln (BIFIE, online). Diese Kompetenzen sind beim Problemlösen schon zu Beginn der Bearbeitung einer Aufgabe gefordert, bei Pólya entsprechen diese Tätigkeiten dem Vertrautwerden mit der Aufgabe, bei dem es auch darum geht, eine für den Problemlösenden verständliche

Darstellungsform zu finden. Beim Ausdenken des Plans ist es wichtig, an bekannte Modelle zu denken und ihren Lösungsweg an den aktuell geforderten anzupassen.

Operieren bedeutet, geeignete Wege zu finden und diese mit den zur Verfügung stehenden Mitteln auszuführen (BIFIE, online). Dies ist beim Ausdenken und Durchführen des Plans, Pólyas zweite beziehungsweise dritte Phase, von Bedeutung.

Beim Interpretieren muss man Zusammenhänge erkennen, notwendige Fakten herauslesen können und Beziehungen herstellen (BIFIE, online). Diese Fähigkeiten fördern das Problemlösen in beinahe jeder Phase, vor allem jedoch in den ersten beiden und der anschließenden Rückschau.

Das Argumentieren und Begründen spielt eine zentrale Rolle beim Problemlösen. Mit logischen Schlüssen müssen die einzelnen Schritte begründet und nachvollziehbar gemacht werden. Das Finden einer eigenen Begründung ist auch für das grundsätzliche Verständnis unerlässlich (BIFIE, online). Es hilft auch für die Rückschau auf ein eben gelöstes Problem sowie für das Argumentieren bei zukünftigen Problemen.

Beim Problemlösen ist jedoch nicht immer genau eine mathematische Handlung gefordert, sondern meistens mehrere zugleich in unterschiedlicher Intensität. „Wir brauchen daher für die Kompetenzentwicklung Problemlöseaufgaben, die die Notwendigkeit der Vernetzung bewusst machen und ein durch passende Aufgaben unterstütztes ‚Handlungslernen' anregen" (BIFIE, 2011, S. 43).

Bei der standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung an einer AHS in Mathematik geht es oft um Grundkompetenzen und Problemlösen. In einer Information des Bifie für Lehrerinnen und Lehrer werden „Bauaufgaben" und „Bausteinaufgaben" definiert. Bei Bausteinaufgaben handelt es sich um Aufgaben, bei denen Grundkompetenzen trainiert werden. Das Beherrschen dieser Grundkompetenzen ist Voraussetzung für die Bauaufgaben, wie die Problemlöseaufgaben an dieser Stelle bezeichnet werden. Allerdings genügt es nicht, nur die Bausteinaufgaben zu beherrschen, um Bauaufgaben lösen zu können. Dazu ist noch die Vernetzungskompetenz erforderlich. Das Lösen von Bauaufgaben sowie das Reflektieren über Lösungswege sollte im Unterricht gefördert werden, da es dieses Vernetzen trainiert. Um das Problemlösen zu fördern, gibt das Bifie zwei mögliche Wege zur Umsetzung im Unterricht an:

- „Bausteinaufgaben vor Bauaufgaben“: Dabei üben oder wiederholen die Schülerinnen und Schüler die für die danach folgende Bauaufgabe benötigten Grundkompetenzen.
- „Bausteinaufgaben nach Analyse von Bauaufgaben“: Dabei geht man den beinahe umgekehrten Weg, nämlich wird die Bauaufgabe zuerst gestellt und analysiert. Danach werden dazu passende Bausteinaufgaben gesucht, um die zur Bauaufgabe passenden Grundkompetenzen zu üben.

(BIFIE, 2011, S. 54f)

4 Interesse, Motivation und Begabung

In diesem Abschnitt werden diese drei Begriffe kurz erläutert und ein Zusammenhang zum Mathematikunterricht hergestellt.

4.1 Interesse

Interesse ist eine Person-Gegenstands-Wechselbeziehung in einem sozialen Kontext – es besteht das Interesse einer Person an einem bestimmten Gegenstand. Interesse ist mit einem positiven Gefühl verbunden und geht von der Person selbst aus, vergleichbar mit intrinsischer Motivation. (Deci, 1992, S. 49)

Als Lehrerin oder Lehrer sollte man erkennen, ob Schülerinnen und Schüler am Mathematikunterricht oder am Fach Mathematik interessiert sind. Einer Befragung von Bikner-Ahsbahs zufolge gaben 8 von 11 befragten Lehrerinnen und Lehrern an, Interesse am Stellen von weiterführenden Fragen zu erkennen – sowohl bei Interesse am Fach als auch bei Interesse am Unterricht. Nur 3 gaben beispielsweise dabei an, dass der Spaß an Knobel- und Denksportaufgaben ein Indikator für Interesse an Mathematik ist. (Bikner-Ahsbahs, 1999, S. 25f)

Um das Interesse an Mathematik bei Schülerinnen und Schülern zu fördern, muss schrittweise vorgegangen werden. Zuerst müssen Interessen geweckt und stabilisiert werden. Dazu muss der Mathematikunterricht so gestaltet werden, dass Schülerinnen und Schüler beginnen können, sich für Mathematik zu interessieren. Dazu kann bei der Aufgabengestaltung Augenmerk auf Themen, die die Schülerinnen und Schüler bereits interessieren, gelegt werden. Sind die Interessen geweckt und stabilisiert, hat die Lehrperson die Aufgabe, den Schülerinnen und Schülern dabei helfen, ihre Interessen weiterentwickeln zu können. (Bikner-Ahsbahs, 1999, S. 37)

4.2 Motivation

Im Spiegel vom 20.01.2013 steht zu lesen, dass Motivation in Mathematik wichtiger sei als Intelligenz. Der Autor beruft sich dabei auf eine Langzeitstudie der Universität München, in der herausgefunden wurde, dass Schülerinnen und Schüler sich erheblich verbesserten, wenn sie unter anderem Spaß am Fach Mathematik hatten. (Dambeck, online)

Dieses Kapitel soll ein paar Definitionen und Gedanken als Überblick zum Thema Motivation im Mathematikunterricht und beim Problemlösen aufgreifen.

Motivation ist der Beweggrund oder Antrieb des menschlichen Handelns (Duden, online). Es gibt extrinsische und intrinsische Motivation. Bei extrinsischer Motivation kommt die Motivation durch Strafe, Anreiz oder Belohnung von außen, während bei der intrinsischen Motivation die Tätigkeit um ihrer selbst willen ausgeführt wird. Zahlreiche Studien haben gezeigt, dass intrinsisch Motivierte genauer und nachhaltiger lernen. (Wild & Krapp, 1995, S. 579f)

Intrinsische Motivation hängt eng mit Interesse zusammen, denn intrinsische Motivation ist ohne Interesse kaum möglich. Hingegen können Tätigkeiten ausgeführt werden, für die kein direktes Interesse besteht, wenn eine andere (extrinsische) Motivation dahintersteckt. Deci gibt als Beispiel an, dass man Tennis spielt, um etwas mit einem Freund zu machen und nicht, weil man an Tennis interessiert ist. Würde der Freund lieber eislaufen gehen, würde man mit ihm eislaufen – mit der Motivation, etwas mit seinem Freund zu unternehmen. (Deci, 1992, S. 52f)

Es gibt Studien, die aussagen, dass extrinsische Motivation die intrinsische hemmt. Wenn jemand also einmal für eine erbrachte Leistung belohnt wurde, würde er diese Tätigkeit weniger gern freiwillig wiederholen. Allerdings wurde auch herausgefunden, dass unter bestimmten Umständen extrinsische Motivation stufenweise mehr und mehr in intrinsische Motivation übergehen kann. (Deci & Ryan, Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik, 1993, S. 227)

Im Mathematikunterricht können extrinsische Motivationsformen wie Noten oder Belohnungen oft nicht vermieden werden. Um die intrinsische Motivation der Schülerinnen und Schüler zu erhalten, muss also vorsichtig damit umgegangen werden. Der eben beschriebene Weg des Integrierens der extrinsischen Motivation in das Selbst kann auch in der Schule die intrinsische Motivation bei Schülerinnen und Schülern gefördert werden.

Vorschläge, wie Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht motiviert werden können, gibt es einige. An dieser Stelle seien ein paar Methoden von Alfred S. Posamentier angegeben, wobei Einiges zum Thema Problemlösen ergänzt wurden:

- „Lücken im Wissen“: Man lässt Schülerinnen und Schüler selbst entdecken, welche Lücken sie in ihrem Wissen noch haben. Mit Hilfe von Aufgaben, die für die Schülerinnen und Schüler lösbar sind, führt man sie an das eigentliche, den vorherigen Problemen ähnlich wirkendes, aber für sie unlösbares Problem heran, das sie dann durch eine Motivation von innen heraus auch lösen wollen. Dies wäre eine Möglichkeit, die Schülerinnen und Schüler an das Problemlösen heranzuführen.
- „Sequential Achievement“ (schrittweise Aneignung): Dabei geht es darum, die Schülerinnen und Schüler merken zu lassen, worin logische Zusammenhänge bestehen und dass das eine Gelernte am anderen aufbaut.
  Für das Problemlösen kann das auf die Fragen in der Phase des Ausdenkens eines Plans bei Pólya umgelegt werden. Wer sich Fragen nach ähnlichen, bekannten Aufgaben stellt, muss den Zusammenhang zum eigentlichen Problem im Auge behalten.
- „Herausforderung“: Dabei stellt man Aufgaben, die die Schülerinnen und Schüler fachlich fordern. Allerdings sollte das nicht in einer Prüfungssituation geschehen, um Motivation herzustellen. Solche Aufgaben können unterschiedlicher Natur sein, im Speziellen also auch Problemlöseaufgaben.
- „Unterhaltsame Mathematik“: Durch Aufgaben, bei denen man über Ergebnisse staunen kann oder die mit kleinen Spielereien versehen sind, kann die Freude am Mathematikunterricht gesteigert werden. Allerdings sollte dabei das eigentliche Unterrichtsziel nicht aus den Augen verloren werden, um diese Freude auch auf den restlichen Unterricht übertragen zu können.
- „Geschichte“: Die Lehrperson erzählt eine interessante, zum Unterrichtsstoff passende Geschichte. Solche Geschichten sind meistens realitätsnäher als die Theorie, was die Motivation steigert, da ein Grund für das Lernen ersichtlich wird.
- „Mathematische Kuriositäten“: Mit Hilfe von außergewöhnlichen Experimenten lässt man Schülerinnen und Schüler selbst mathematische Zusammenhänge erarbeiten. Als Beispiel gibt Posamentier folgendes an: Die Schülerinnen und Schüler sollen beliebige Vierecke zeichnen, am besten jeder und jede ein anderes als der Rest der Klasse. Dann

sollen sie in ihren Vierecken jeweils die Mittelpunkte der einzelnen Seiten miteinander verbinden und entdecken, dass dies bei jeder und jedem ein Parallelogramm ergibt. Anschließend kann anhand dieses Experiments erörtert werden, warum das immer gilt. Mathematische Kuriositäten lassen sich auch in Problemlöseaufgaben verpacken, egal ob geometrisch oder als Zahlenspielereien.

- „Materialien“: Bringt die Lehrperson besonderes Material für den Unterricht in die Klasse mit, erzeugt dies eine gewisse Neugier bei den Schülerinnen und Schülern.

(Posamentier, 1990, S. 174 - 187)

Sowohl Posamentier (1990, S. 186f) als auch viele andere Autoren, beispielsweise Büchter und Henn (Bruder, Hefendehl-Hebeker, Schmidt-Thieme & Weigand, 2015), sehen den Realitätsbezug im Mathematikunterricht als großen Faktor für Motivation.

Muth-von Hinten gibt einige Punkte an, warum Problemlöseaufgaben der Motivation von Schülerinnen und Schülern dienen können. Darunter sind:

- Die Schülerinnen und Schüler erkennen, wofür Mathematik anwendbar ist. Durch das Lösen von Problemen erkennen sie Anknüpfungspunkte an das (außermathematische) Leben.
- Die Schülerinnen und Schüler erkennen mathematische Strukturen sowie bisher unbekannte Gesetzmäßigkeiten und erleben diesbezüglich einige Überraschungsmomente.
- Eigenständiges Arbeiten und geforderte Kreativität zählen zu Motivationsfaktoren. Dazu kommt eine richtige Dosis an Hilfestellungen – sodass die Schülerinnen und Schüler nicht demotiviert sind, da sie von selbst nicht weiterkommen, sondern dass die eigenständige Leistung im Vordergrund steht, worauf sie nach dem Lösen der Aufgabe zurückblicken können.
- Wenn der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben richtig gewählt wurde, besteht eine berechtigte Hoffnung und damit Motivation, die Aufgabe lösen zu können.

(Muth-von Hinten, online, S. 5f)

4.3 Begabung

Das ÖZBF (Österreichisches Zentrum für Begabtenförderung und Begabtenforschung) schreibt über die Definition von Begabung: „Begabung ist das Potenzial eines Menschen zu außergewöhnlicher Leistung.“ Begabung galt lange Zeit als äquivalenter Ausdruck für einen hohen IQ (>130), wovon man in letzter Zeit immer mehr abkam, da auch beispielsweise soziale Kompetenz als Begabung gilt. Des Weiteren gibt es den Begriff der „Leistungsexzellenz“. Diese ist eine lang andauernde herausragende Leistung. Dies hängt nicht immer gleich mit Begabung zusammen. Begabung kann vorhanden sein, ohne sich zu entwickeln. Diese Entwicklung findet durch Persönlichkeitsfaktoren (Motivation, persönliches Interesse) sowie Umwelteinflüsse (Familie, Schule, Mentoren…) statt. (Österreichisches Zentrum für Begabtenförderung und Begabtenforschung, online)

Für die Feststellung von Begabung gibt es mehrere Tests, wobei das Austesten gerade in Bereichen wie der sozialen Kompetenz oder Musikalität sich als sehr schwierig erweist. Einfacher zu testen ist beispielsweise der IQ einer Person. Grundsätzlich kann man davon ausgehen, dass zwischen 15 und 20 Prozent der Kinder und Jugendlichen bei förderndem Umfeld begabt sind bzw. das Potenzial dafür haben. (Österreichisches Zentrum für Begabtenförderung und Begabtenforschung, online)

Oftmals sind mit Hochbegabung Defizite in anderen Bereichen verbunden. Solche Schülerinnen und Schüler brauchen besondere Beachtung und Leitung. Häufig werden Schülerinnen und Schüler aufgrund permanenter Unterforderung unaufmerksam und laut, was zu Ermahnungen und in der Folge zu Demotivation führt. Deshalb bedarf es einer Individualisierung, bei der auf jede einzelne Schülerin und jeden einzelnen Schüler eingegangen werden muss und bei der die jeweiligen Stärken gefördert werden müssen. (Friedrich, 2008, S. 89ff)

Begabung kann nicht mit der von der Schülerin oder vom Schüler erbrachten Leistung gleichgesetzt werden, denn jedes vorhandene Potential muss erst ausgeschöpft werden. Dabei spielen Komponenten wie Motivation, Interesse, Leistungswille und Fleiß eine große Rolle. (Ullrich & Strunck, 2008)

4.3.1 Begabtenförderung im Gesetz

Nach dem Schulunterrichtsgesetz (§ 17, Unterrichtsarbeit) ist der Lehrer verpflichtet, „jeden Schüler nach Möglichkeit zu den seinen Anlagen entsprechenden besten Leistungen zu führen" (Rechtsinformationssystem des Bundeskanzleramts, online), was auch einschließt, begabte Schülerinnen und Schüler auf ihrem Niveau bzw. mit ihren Anlagen zu fördern.

Im Bundesgesetz vom 25. Juli 1962 über die Schulorganisation ist in den Lehrplänen (§ 6 Abs. 4) zu finden: „Darüber hinaus können in den Lehrplänen auch weitere Unterrichtsgegenstände als Freigegenstände (auch Freigegenstände für besonders begabte und interessierte Schülerinnen und Schüler mit entsprechenden Anforderungen) und unverbindliche Übungen sowie ein Förderunterricht vorgesehen werden" (Rechtsinformationssystem des Bundeskanzleramts, online). Das heißt, dass das Anbieten von Freigegenständen der Schule überlassen ist und nicht verpflichtend durchgeführt werden muss.

In einem Rundschreiben im Jahr 2009 wurde ein Grundsatzerlass zur Begabtenförderung vom BMUKK (Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur) veröffentlicht, in dem gefordert wird, Begabungen einzelner Schülerinnen und Schüler zu fördern. Dies soll nicht nur dem reinen Fördern der Begabung dienen, sondern auch Unterforderung verhindern, die teilweise zu Lernschwierigkeiten und Verhaltensauffälligkeiten führen kann. (Bundesministerium für Bildung, online)

Des Weiteren soll bei Begabtenförderung stärkenorientiert vorgegangen werden, auch deshalb, weil eventuelle Schwächen durch das Fördern der Stärken leichter überwunden werden können. Erwähnt wird auch, dass (Hoch)Begabung nicht immer mit guten Noten einhergehen muss und vielen (hoch)begabten Schülerinnen und Schülern sogar die Motivation fehlt. Für den Umgang mit Begabungen sollten bestimmte Lehrerfortbildungen angeboten und besucht werden. (Bundesministerium für Bildung, online)

Förderung sollte demnach unter folgenden Parametern erfolgen:

- Differenzierung und Individualisierung: Dabei soll auf die einzelnen Schülerinnen und Schüler in der Planung und Durchführung eingegangen werden, und zwar sowohl in inhaltlichen als auch methodischen Bereichen.
- Enrichment: Dies soll begabten Schülerinnen und Schülern ermöglichen, sich intensiv mit Inhalten zu beschäftigen, die über den Unterrichtsstoff hinausgehen.

- Akzeleration: Dabei soll das Unterrichtsangebot an „das geistige Entwicklungsalter“ angepasst werden, was bedeutet, dass begabte Schülerinnen und Schüler anderen Gleichaltrigen in gewissen Bereichen voraus sein können und dadurch Förderungsmaßnahmen bis hin zum Überspringen von Klassen ergriffen werden können.

(Bundesministerium für Bildung, online)

5 Mathematische Wettbewerbe in Österreich

Mathematische Wettbewerbe gibt es in Österreich seit vielen Jahren. Sie dienen meistens der Begabten- und Interessiertenförderung. In diesem Kapitel sind einige der bekanntesten Wettbewerbe, die zurzeit in Österreich stattfinden, kurz beschrieben.

5.1 Känguru der Mathematik

Ursprünglich begann man in Australien, einen Multiple-Choice-Test zu entwickeln, der möglichst vielen Schülern Spaß machen und Stoff zum Knobeln geben sollte, und der seit 1978 dort stattfindet. Bald holten europäische Mathematiker den Test nach Europa, adaptierten ihn und nannten ihn zu Ehren der Erfinder „Känguru der Mathematik“. In den letzten Jahren nahmen über 6 Millionen Schülerinnen und Schüler in ca. 60 Ländern am Test teil. In Österreich waren es im Jahr 2016 etwa 106500 Teilnehmerinnen und Teilnehmer. (Känguru der Mathematik Deutschland, online)

Die Aufgaben werden zentral erstellt und sorgfältig ausgewählt. Jedes teilnehmende Land darf dann 5 Aufgaben aus den zentralen Aufgaben austauschen, da nicht alle Länder die gleichen Lehrpläne haben und in manchen Ländern Inhalte vorausgesetzt werden können, die in anderen Lehrplänen noch nicht vorgekommen sind. Der Test findet dann für alle Schülerinnen und Schüler am gleichen Tag zur gleichen Zeit statt. (Känguru der Mathematik Deutschland, online)

Es gibt Beispiele mit 3, 4 und 5 zu erreichenden Punkten. Als Startkapital erhalten alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer je nach Altersstufe 24 oder 30 Punkte. Für jede richtige Antwort erhält man die Anzahl der Punkte für das jeweilige Beispiel, für eine Nichtbeantwortung einer Aufgabe gibt es 0 Punkte und für das Falsch-Beantworten wird ein Viertel der zu erreichenden Punkte (also 0,75, 1 oder 1,25) abgezogen. Mit dem Startkapital wird sichergestellt, dass kein Schüler unter 0 Punkte kommen kann. Der Maximalpunktestand beträgt 120 bzw. 150 Punkte, wenn alle Aufgaben richtig beantwortet werden. (Känguru der Mathematik Deutschland, online)

Die Aufgaben entsprechen meistens nicht solchen Aufgaben, wie sie im Regelunterricht bearbeitet werden. Oftmals ist logisches Denken, Verknüpfen oder Ausschließen gefragt, um die richtige Antwort zu finden. Zu jeder Aufgabe stehen fünf Antwortmöglichkeiten zur Verfügung. Die Lösungsbuchstaben müssen bei der Abgabe des Wettbewerbs am Deckblatt eingetragen sein, nur dies wird bewertet. Wem also beim Eintragen ein Fehler unterläuft, bekommt auch keine Punkte für gute Ansätze oder Lösungswege.

Da die Schülerinnen und Schüler je nach Kategorie nur 60 bzw. 75 Minuten zur Verfügung haben, spielt Zeiteinteilung und Strategie diesbezüglich eine große Rolle: Man sollte sich nicht zu lange mit einzelnen schwierigen Beispielen beschäftigen, um genügend Zeit für die anderen zu haben. Außerdem gibt es verschiedene Strategien bezüglich der Reihenfolge – ob man nun also zuerst die leichteren Beispiele mit weniger Punkten bearbeitet oder ob man mit den schwierigeren beginnt.

5.2 Mathematik-Olympiade

Die Idee, eine Mathematik-Olympiade zu veranstalten, kommt eigentlich aus Russland. Bevor österreichische Schülerinnen und Schüler am Wettbewerb teilnahmen, wurden Vorbereitungskurse organisiert, um inhaltliche Voraussetzungen zu schaffen. (Österreichische Mathematik Olympiade - ÖMO, online)

Im Prinzip kann jede Schülerin oder jeder Schüler ab der 5. Klasse AHS an einem Mathematik-Olympiade-Kurs teilnehmen, sofern ein solcher in erreichbarer Nähe angeboten wird. Im Normalfall wird der Kurs in zwei Wochenstunden pro Schuljahr abgehalten. Es gibt Anfänger- sowie Fortgeschrittenenkurse. In den Kursen werden mathematische Inhalte gelehrt, die über den Unterrichtsstoff hinausgehen und somit begabten Schülern die Chance bieten, sich ein wenig zu vertiefen. (Österreichische Mathematik Olympiade - ÖMO, online)

Zusätzlich gibt es Wettbewerbe, bei denen sich die Schüler jeweils für den nächsthöheren qualifizieren können. Diese beginnen regional und finden anschließend bundesweit statt. Die besten qualifizieren sich dabei für die MEMO (Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade) und die IMO (Internationale Mathematik-Olympiade). (Österreichische Mathematik Olympiade - ÖMO, online)

Der Unterschied zu den Beispielen des Kängurutests besteht darin, dass auf Begründung und Beweis Wert gelegt wird, keine Antwortmöglichkeiten vorhanden sind und pro Aufgabe, die deutlich umfangreicher als jene beim Kängurutest sind, wesentlich mehr Zeit zur Verfügung steht. So dauert der Wettbewerb mit meistens 4 Aufgaben je nach Wettbewerb zwischen 3 und 4,5 Stunden, während man für 24 beziehungsweise 30 Kängurufragen nicht einmal die Hälfte der Zeit zur Verfügung hat. (Österreichische Mathematik Olympiade - ÖMO, online)

5.3 Mathematical Duel

Im Gegensatz zu den beiden vorher erwähnten Wettbewerben, ist das „Mathematical Duel“ kein Wettbewerb, an dem im Grunde alle österreichischen Schülerinnen und Schüler teilnehmen können. Er wurde von einzelnen engagierten Lehrenden einiger Schulen gegründet und findet ausschließlich als Wettbewerb zwischen diesen Schulen zuzüglich einer Gastschule pro Jahr statt.

Seit 24 Jahren gibt es den Mathematik-Wettbewerb „Mathematical Duel“, der seit 2014 auch ein Erasmus+ Projekt ist. Der Wettbewerb findet jährlich zwischen dem BRG Kepler Graz, zwei tschechischen und einer polnischen Schule statt, wobei meistens ein weiteres Team aus dem jeweiligen Gastgeberland teilnimmt. Der Austragungsort des Wettbewerbs ändert sich jährlich, sodass alle Schulen abwechselnd Gastgeber sind. Im März 2017 fand der Wettbewerb in Graz statt. (Mathematical Duel, online)

Es gibt drei Wettbewerbskategorien. Schülerinnen und Schüler der 3. und 4. Klasse (7./8. Schulstufe) bestreiten den Wettbewerb in der Kategorie C, jene aus der 5. und 6. Klasse Kategorie B und jene aus der 7. und 8. Klasse Kategorie A. Pro Schule nehmen pro Kategorie 4 Schülerinnen und Schüler am Wettbewerb teil. Alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer bekommen einen englischsprachigen Test, wobei für Übersetzungsfragen Betreuerinnen und Betreuer zur Verfügung stehen. Die Aufgaben sind ähnlich jenen der Mathematik-Olympiade und werden von den an der Organisation beteiligten Personen erstellt. Beim Einzelwettbewerb hat man für vier Aufgaben 150 Minuten Zeit. Die Besonderheit am Mathematical Duel ist der Teamwettbewerb. Dabei haben die Teams bestehend aus den Schülerinnen und Schülern einer Altersstufe einer Schule 90 Minuten Zeit, um drei Aufgaben gemeinsam zu lösen. Bei jeder Aufgabe können maximal 8 Punkte erreicht werden, die Siegerinnen und Sieger des Einzel- und Team-Wettbewerbs werden noch in den Wettbewerbstagen ermittelt und geehrt. (Mathematical Duel, online)

Welche Schülerinnen und Schüler am Wettbewerb teilnehmen dürfen, entscheiden die Schulen beziehungsweise Qualifikationswettbewerbe in den Mathematik-Olympiade-Kursen.

Die beim Wettbewerb gestellten Aufgaben sind ähnlich den Aufgaben der Mathematik-Olympiade und deutlich ausführlicher zu behandeln beziehungsweise anspruchsvoller als jene beim Kängurutest oder der Befragung im Zuge dieser Diplomarbeit.

Beispielhaft seien an dieser Stelle zwei Aufgaben angegeben, die die Schülerinnen und Schüler beim heurigen Wettbewerb bearbeiten mussten.

„Determine all integers n satisfying the equation

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})} = \frac{24}{25}.\text{"}$$

(25th Mathematical Duel: Category A - individual competition, Aufgabe 1, 2017)

Diese Aufgabe musste von den ältesten Teilnehmerinnen und Teilnehmern gelöst werden, zählt also zu den absolut schwierigsten Aufgaben des diesjährigen Wettbewerbs.

In der Kategorie C wurde eine Aufgabe gestellt, die gewisse Ähnlichkeiten zur Palindrom-Aufgabe in der Befragung zu dieser Diplomarbeit aufweist, da es auch hierbei um das systematische Zählen von Zahlen gewisser Bauart geht.

„The Count of Lichenem likes to count, but he doesn't like most of the numbers. He likes a number if it has both even and odd digits, and he doesn't like a number if it has even number of odd digits or an odd number of even digits.

a) How many numbers smaller than 100 does the Count like?

b) How many numbers smaller than 1000 does the Count like?

c) How many numbers smaller than 10000 does the Count like?"

(25th Mathematical Duel: Category C - individual competition, Aufgabe 4, 2017)

Teil II

Praktischer Teil

6 Beschreibung der Befragung

Das Ziel der Befragung ist es, herauszufinden, wie Schülerinnen und Schüler Probleme lösen, ob sie Freude daran haben und wie gut sie sich dabei einschätzen können. Es geht in erster Linie nicht darum, welche der beiden befragten Gruppen mehr Aufgaben lösen kann, da es sich dabei um einen unfairen Wettbewerb handeln würde. Allerdings werden die Lösungshäufigkeiten betrachtet, um auf das Problemlöseverhalten schließen zu können und um herauszufinden, bei welchen Aufgaben der Unterschied deutlich beziehungsweise bei welchen er gering ist.

6.1 Aufbau

Die Befragung besteht aus einem schriftlichen und einem mündlichen Teil. Im schriftlichen Teil mussten die Befragten zuerst einen persönlichen Fragebogen ausfüllen, anschließend sechs Aufgaben bearbeiten und am Ende sich selbst einschätzen. Im mündlichen Teil wurden den Schülerinnen und Schüler noch zwei weitere Aufgaben gestellt, wobei sie ihre Gedankengänge laut mitsprechen sollten. Im Anschluss an den mündlichen Teil gab es eine erneute Selbstreflexion und ein kurzes Gespräch über das Problemlösen und die gestellten Aufgaben.

In Kapitel 0 werden die einzelnen Teile der Befragung genauer beschrieben und verschiedene Lösungswege vorgestellt.

Erwähnenswert ist, dass allen Schülerinnen und Schülern die gleichen Aufgaben gestellt wurden, was zudem noch die Untersuchung ermöglicht, welche Unterschiede sich aufgrund des unterschiedlichen Alters und der entsprechenden Erfahrung ergeben.

6.2 Fragestellungen

Zusätzlich zu den verschiedenen Strategien und Lösungsideen sollte die Befragung Antworten auf folgende Fragestellungen liefern:

- Lösen begabte Schülerinnen und Schüler gerne Probleme und gibt es einen Unterschied zwischen den beiden Gruppen?
- Mögen interessierte Schülerinnen und Schüler den Mathematik-Regelunterricht? Gibt es dabei einen Unterschied zwischen den Gruppen α und β?

- Fühlen sich interessierte Schülerinnen und Schüler im Mathematik-Regelunterricht unterfordert? Wünschen sie sich mehr Förderung von begabten oder interessierten Schülerinnen und Schülern und inwiefern ist diese ihrer Meinung nach bereits vorhanden?
- Haben sie Prüfungs- oder Wettbewerbsangst?
- Aus welchen Gründen nehmen interessierte Schülerinnen und Schüler nicht an einem Mathematik-Olympiade-Kurs teil?
- Kann man durch Problemlösen im Unterricht interessierte Schülerinnen und Schüler fördern?
- Wie schwierig sind die gestellten Aufgaben für die Befragten?
- Welche Aufgaben mögen welche Schülerinnen und Schüler gern beziehungsweise nicht gern und warum? Hängt diese Vorliebe mit dem jeweiligen Schwierigkeitsgrad zusammen?
- Welche der gestellten Aufgaben sind die (un)beliebtesten und welche Kriterien nennen die Befragten für diese?

6.3 Auswahl der Stichprobe

Bei den Befragten handelt es sich pro Gruppe um 24 bis 27 Schülerinnen und Schüler. Gruppe α besteht aus jenen Grazer Schülerinnen und Schülern, die im März 2017 am Wettbewerb „Mathematical Duel“ teilnahmen. Jeweils acht kommen aus den Wettbewerbskategorien A, B und C, besuchen also die 7./8., 5./6. beziehungsweise 3./4. Klasse einer AHS. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer sind großteils Schülerinnen und Schüler des BRG Kepler, jedoch sind auch einige aus anderen Grazer Schulen darunter, die im sogenannten „Allstars“-Team als Gast-Team am Wettbewerb teilnahmen.

Für die Gruppe β wurden Schülerinnen und Schüler des BRG Kepler ausgewählt, wobei ihre jeweiligen Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer sie fragten, ob sie Lust und Interesse hätten, an einer Befragung teilzunehmen. Vorgeschlagen wurden dabei Schülerinnen und Schüler, bei denen die Lehrpersonen vermuteten, dass sie gerne (und gut) Knobelaufgaben lösen würden. Die Altersverteilung ist in etwa die selbe wie in Gruppe α. Da sich etwas mehr als 24 Schülerinnen und Schüler für die Befragung meldeten, wurden trotzdem alle befragt, da eine größere Anzahl an Befragten eine möglicherweise größere Ideenvielfalt bedeutet. In jeder der drei Wettbewerbskategorien sind auch in dieser Gruppe je mindestens acht Schülerinnen und Schüler. Voraussetzung für das Teilnehmen an der Befragung für die Gruppe β war, dass die Befragten aktuell keinen Mathematik-Olympiade-Kurs besuchen durften, da in diesem Fall die Problemlösestrategien jener Schülerinnen und Schüler untersucht werden sollten, die mit Mathematik hauptsächlich ausschließlich im Regelunterricht in Berührung kommen.

Hingegen besuchen alle Schülerinnen und Schüler der Gruppe α einen Mathematik-Olympiade-Kurs. Dieser beinhaltet nicht nur Inhalte, die über den Unterrichtsstoff hinausgehen, sondern auch beispielsweise Beweis- und Argumentationsmethoden und Heurismen. Daher ist anzunehmen, dass die Schülerinnen und Schüler der Gruppe α einen erheblichen Vorteil aufgrund von Übung haben, schließlich kommen sie regelmäßig mit Problemlöseaufgaben in Kontakt und versuchen häufig, unbekannte Aufgaben zu lösen.

6.4 Methoden der Auswertung

Eine grobe Auswertung der Antworten wurde mit Hilfe mehrerer Excel-Tabellen gemacht. Darin sind nicht nur die korrekten Lösungen vermerkt, sondern auch eine ungefähre Einteilung in Lösungsverfahren. In der genaueren Betrachtung wurden dann schließlich wieder die Befragungsbögen herangezogen und jeder einzelne Lösungsversuch betrachtet. Selbstverständlich können im Rahmen dieser Diplomarbeit nicht alle Aspekte und Zusammenhänge analysiert werden, daher wurde die Analyse auf die herausstechendsten und am wichtigsten erscheinenden Aspekte beschränkt.

6.5 Vermutungen

Wie bereits beschrieben, ist anzunehmen, dass die Gruppe α deutlich mehr Aufgaben korrekt lösen und sich genauer einschätzen kann. Jedoch wird auch vermutet, dass die Vielfalt der Ideen auch gerade in Gruppe β groß ist, da diese Schülerinnen und Schüler nicht auf spezielle Verfahren und Lösungsstrategien trainiert sind und somit selbst überlegen müssen, wie sie eine Aufgabe bearbeiten könnten.

In der Literatur wurden keine konkreten Aussagen gefunden, wie Schülerinnen und Schüler Aufgaben lösen beziehungsweise welche Unterschiede zwischen Gruppen wie jenen in dieser Befragung existieren. Es muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass die Literaturrecherche zum größeren Teil darin bestand, Möglichkeiten zum Problemlösen-Lernen herauszufinden, anstatt nach ähnlichen Studien zu suchen.

7 Erläuterung der Fragebögen

In diesem Abschnitt möchte ich jene Aufgaben genauer erläutern, die ich für die Befragung der Schülerinnen und Schüler ausgewählt habe.

7.1 Persönliche Fragen

Dieser Fragebogen soll von den Schülerinnen und Schülern vor den Aufgaben ausgefüllt werden. Es gibt je einen eigenen Fragebogen für jene Schülerinnen und Schüler der Gruppe α und für jene der Gruppe β. Allerdings unterscheiden sich diese Fragebögen nur um wenige Fragen: Jene Fragen, die den Mathematik-Olympiade-Kurs betreffen, wurden durch andere ersetzt. Durch den Fragebogen sollen einige Fragestellungen zu verschiedenen Themen beantwortet werden können:

- Mathematik als Schulfach: Zählt das Schulfach zu einem der Lieblingsfächer, interessiert die Schülerinnen und Schüler der im Unterricht behandelte Inhalt, zählen sie sich zu jenen begabten und interessierten Schülerinnen und Schülern und fühlen sie sich unterfordert?
- Mathematik allgemein und Problemlöseaufgaben: Sind die Schülerinnen und Schüler allgemein an Mathematik interessiert, beschäftigen sie sich gerne auch in der Freizeit mit mathematischen Inhalten und wie ist ihre Einstellung zu Aufgaben, bei denen sie „knobeln" oder „rätseln"[1] müssen?
- Prüfungs- und Wettbewerbsangst: Sind die Schülerinnen und Schüler vor Schularbeiten oder Wettbewerben (falls sie schon einmal daran teilgenommen haben) nervös? Für Gruppe β: Haben sie Angst vor mathematischen Wettbewerben oder würden sie gerne öfter an solchen teilnehmen?
- Mathematik-Olympiade-Kurs: Wie lange besuchen die Schülerinnen und Schüler den Kurs schon, gehen sie gerne in den Kurs und finden sie die im Kurs gelernten Inhalte interessant (Gruppe α)? Beziehungsweise: Warum besuchen sie keinen Mathematik-Olympiade-Kurs (Gruppe β)?

[1] Im Fragebogen wird der Begriff „Problemlöseaufgabe" bewusst vermieden, da nicht sichergegangen werden kann, dass alle Schülerinnen und Schüler dasselbe unter dem Begriff verstehen. Stattdessen wurde der Begriff mit „Aufgaben, bei denen man knobeln / rätseln / überlegen muss" umschrieben.

7.2 Schriftliche Aufgaben

Beiden Gruppen werden dieselben Aufgaben gestellt. Es sind keinerlei elektronische Hilfsmittel oder Formelsammlungen erlaubt, der Zeitrahmen zur Bearbeitung beträgt 47 Minuten (2 Minuten für Aufgabe 1 und 45 Minuten für die restlichen schriftlichen Aufgaben).

Aufgabe 1 ist auf einem eigenen Blatt gedruckt und muss nach exakt zwei Minuten abgegeben werden.

7.2.1 **Aufgabe 1**

****

Du hast genau 2 Minuten Zeit, um folgende Multiplikation auszuführen:

$$81624324048566472808 \cdot 12{,}5 =$$

(Maslanka, 1990, S. 47, vgl. Hemme, 2013, S. 57)

****

Diese Aufgabe muss also unter Zeitdruck bearbeitet werden, was dem Problemlösen eigentlich nicht förderlich ist (Büchter & Leuders, 2009, S. 42f). Allerdings soll mit Hilfe dieser Aufgabe herausgefunden werden, ob die Schülerinnen und Schüler in kurzer Zeit einen kreativeren, einfacheren Lösungsweg entwickeln oder ob sie versuchen, die Multiplikation so schnell wie möglich auszuführen.

Der wahrscheinlich einfachste Weg ist es, die 12,5 durch $\frac{100}{8}$ zu ersetzen. Der erste Faktor der Multiplikation wurde so gewählt, dass das Dividieren durch 8 sehr schnell und einfach ist. (Hemme, 2013, S. 186)

7.2.2 **Aufgabe 2**

****

Im Viereck ABCD gilt AD = BC (das sind die Längen der Seiten). Einige Winkel sind in der folgenden Abbildung eingezeichnet. Wie groß ist der Winkel δ? Begründe Deine Antwort!

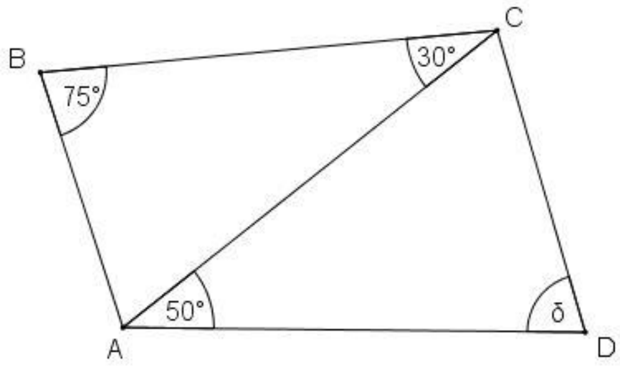


Abbildung 2: Skizze zu Aufgabe 2

(Känguru der Mathematik Österreich, online)

****

Diese Aufgabe wurde im Jahr 2004 beim Kängurutest in der Kategorie Junior (9./10. Schulstufe) gestellt, dort gab es allerdings fünf Antwortmöglichkeiten. Da für das Lösen dieser Aufgabe nur das Wissen der Winkelsumme in Dreiecken und die Eigenschaften eines gleichschenkeligen Dreiecks nötig sind, sollten die Schülerinnen und Schüler auch ohne Antwortmöglichkeiten auf das Ergebnis kommen. Um genauere Auskünfte über den Lösungsweg zu bekommen, wurde die Aufgabe mit einer Aufforderung zur Begründung der Antwort erweitert.

7.2.3 **Aufgabe 3**

****

In einem Dreieck mit den Seitenlängen 11, 7 und 5 Zentimeter sind 10 Linien eingezeichnet, die alle parallel zur kürzesten Dreiecksseite verlaufen und die das Dreieck in 11 gleich breite Streifen zerteilen. Wie groß ist die Gesamtlänge dieser eingezeichneten Linien?

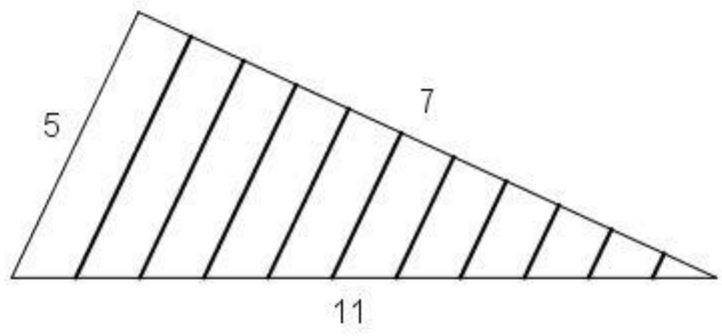


Abbildung 3: Skizze zu Aufgabe 3

(Hemme, 2013, S. 13)

****

Diese Aufgabe hat große Ähnlichkeit mit der Gaußschen Summenformel. Der Geschichte nach hat der damals etwa neunjährige Carl Friedrich Gauß binnen kürzester Zeit das Ergebnis jener Aufgabe vorgelegt, die sein Lehrer Büttner der Klasse aufgegeben hatte: Alle ganzen Zahlen zwischen 1 und 100 sollten zusammengezählt werden. (Mania, 2008, S. 23ff)

Die Idee dahinter besteht darin, die kleinste mit der größten Zahl zu addieren, die zweitkleinste mit der zweitgrößten und so weiter, bis kein Paar mehr übrigbleibt. Jedes Mal erhält man dieselbe Summe, im Falle des Beispiels bei Gauß wäre das die 101. Dies muss man nur noch mit der Anzahl der erhaltenen Zahlpaare multiplizieren (in diesem Fall 50), um das Ergebnis zu erhalten: $101 \cdot 50 = 5050.$ (Krbek, 1971, S. 18f)

Da die „Original-Aufgabe“ wohl vielen Schülern bekannt sein sollte, habe ich mich hier für eine abgewandelte, geometrische entschieden. Allerdings funktioniert der gleiche Gedankengang auch bei dieser hier gestellten Aufgabe.

Dazu müssen das Dreieck zum Parallelogramm ergänzt und die eingezeichneten Linien verlängert werden. So haben alle eingezeichneten, verlängerten Linien den Wert der kürzesten Seite im Dreieck, also 5. Zählt man nun alle Linienlängen des Parallelogramms zusammen, erhält man $5 \cdot 10 = 50$. Dieses Ergebnis muss noch halbiert werden, da ja nur die Länge der Linien im Dreieck, welches genau der Hälfte des Parallelogramms entspricht, gesucht ist. (Krbek, 1962, S. 19, zitiert nach Hemme, 2013, S. 97)

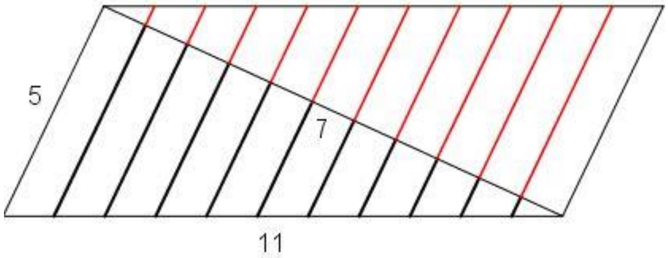


Abbildung 4: möglicher Lösungsweg zu Aufgabe 3

Genau genommen wäre jedoch das geometrische Pendant zum oben beschriebenen Gaußschen Gedankengang folgendes: Man nehme die kürzeste der eingezeichneten Linien und lege sie an die längste an, das gleiche mache man mit der zweitkürzesten und so weiter (siehe Abbildung 5). So erhält man direkt die 5 entstandenen gleich langen Linien und rechnet: $5 \cdot 5 = 25$.

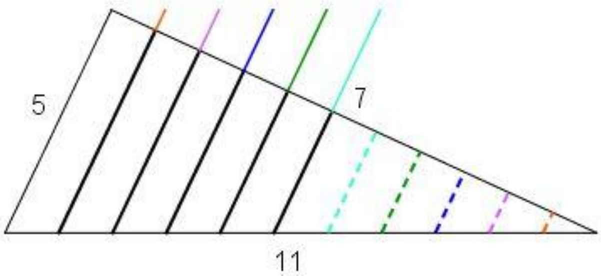


Abbildung 5: möglicher Lösungsweg zu Aufgabe 3

Selbstverständlich gibt es auch viele andere Lösungswege. Es wird sich zeigen, ob sich die Schülerinnen und Schüler mehrheitlich für eine geometrische Lösung entscheiden oder nicht.

7.2.4 **Aufgabe 4**

****

Gib eine Methode an, wie man ein beliebiges Quadrat in 29 kleinere (nicht notwendigerweise gleich große) Quadrate zerteilen kann. (Wettbewerb Mathematical Duel, 1994)

Zusatzfrage: Finde eine Möglichkeit, das Quadrat in 29 kleinere Quadrate zu zerteilen, sodass möglichst viele der entstandenen Quadrate gleich groß sind.

****

Bei dieser Aufgabe ist es wichtig zu erkennen, dass das Zerteilen in lauter gleich große Quadrate gar nicht möglich ist. Man muss also eine Möglichkeit finden, verschieden große Quadrate zu erzeugen. Es wird sich weisen, inwieweit die Schülerinnen und Schüler der Gruppe α darauf trainiert sind, nach bestimmten Schemata zu suchen.

Die Zusatzfrage wurde selbst formuliert. Sie hat das Ziel, herauszufinden, ob die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass 28 gleich große Quadrate definitiv die größtmögliche Anzahl an gleich großen Quadraten ist.

Meine „persönliche Erstlösung“ war die Variante mit 25 kleinen Quadraten außen und 4 in der Mitte, was mich auch auf die Idee nach der Frage gebracht hat, wie man denn noch mehr gleiche Quadrate erzeugen könnte.

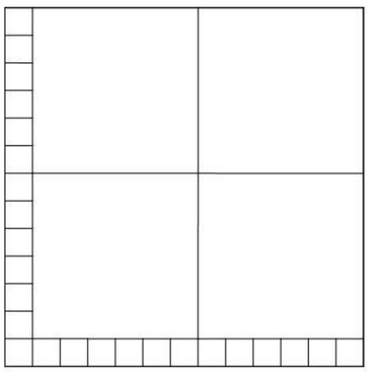


Abbildung 6: mögliche Lösung zu Aufgabe 4

Eine Lösungsmöglichkeit mit 28 gleich großen Quadraten wäre die folgende:

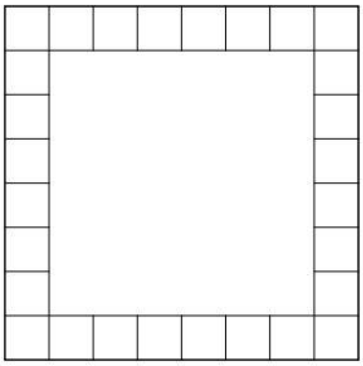


Abbildung 7: mögliche Lösung zu Aufgabe 4 inkl. Zusatzfrage

7.2.5 **Aufgabe 5**

****

Ein Palindrom ist ein Wort, das man nicht nur wie gewöhnlich von links nach rechts lesen kann, sondern auch von rechts nach links, ohne dass sich sein Sinn dabei ändert, wie zum Beispiel bei den Wörtern „Ebbe“, „Madam“ oder „Reittier“. Es gibt natürlich auch unter den Zahlen Palindrome, wie zum Beispiel 1991. Wie viele (ganzzahlige) Palindrome gibt es, die größer als 0 und kleiner als 10000 sind (wobei die Zahl nicht mit „0“ beginnen darf, wie zum Beispiel „00900“)?

(Hemme, 1994, S. 32)

Zusatzfrage: Wie viele Palindrome gibt es, die kleiner als 10^n sind, wobei n eine beliebige positive ganze Zahl sein soll?

****

Bei dieser Aufgabe gibt es auch mehrere Lösungsmöglichkeiten. Für den Fall, dass die Palindrome kleiner als 10000 sind, erhält man relativ schnell ein Ergebnis durch systematisches Probieren und Addieren. Dabei zählt man die Anzahl der einstelligen Palindrome (1 bis 9) und addiert die Anzahl der zwei-, drei- und vierstelligen miteinander.

Wenn man allgemeiner denkt beziehungsweise die Zusatzaufgabe betrachtet, kann man auch schnell auf die Idee kommen, dass beispielsweise vierstellige Palindrome mit jeder beliebigen zweistelligen Zahl gebildet werden können, indem man die Zahl an sich selbst in umgekehrter Ziffernfolge anhängt, zum Beispiel macht man aus der Zahl 12 das Palindrom 1221. Für

Palindrome mit gerader Ziffernanzahl funktioniert das immer, jeweils mit einer beliebigen Zahl mit der halben Länge. Bei ungeraden Längen kann man nach demselben Prinzip vorgehen, allerdings kann man in der Mitte eine beliebige Ziffer von 0 bis 9 einfügen, beispielsweise 12021 oder 12121. Also gibt es jeweils zehnmal so viele Palindrome mit ungerade Ziffernanzahl als gerade mit der um 1 verringerten Ziffernanzahl.

Hemme gibt einen fast äquivalenten Lösungsweg an, allerdings nimmt er für die Erzeugung eines ungeradstelligen Palindroms eine der beiden gleichen Mittelziffern weg. Dazu muss erkannt werden, dass es $10^m - 1$ natürliche Zahlen mit einer maximalen Länge von m Ziffern gibt (mit $m \in \mathbb{N}$). So erhält er als Gesamtzahl N aller Palindrome mit höchstens n Stellen die Lösungsformel:

$N = 10^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 10^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} - 2$, wobei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl sei, die kleiner oder gleich als x ($x \in \mathbb{R}$) ist. (Hemme, 1994, S. 87)

7.2.6 **Aufgabe 6**

****

Ein DIN-A4-Blatt, dessen Seiten 297 und 210 Millimeter lang sind, wird entlang seiner beiden Diagonalen geknickt. Es entstehen dabei vier Dreiecke.
Wie groß ist das Verhältnis der Flächen des spitzwinkeligen Dreiecks (A) und des stumpfwinkeligen Dreiecks (B)?

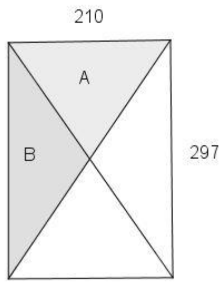


Abbildung 8: Skizze zu Aufgabe 6

Zusatzfrage: Gibt es Rechtecke, bei denen dieses oben beschriebene Verhältnis ein anderes ist? Begründe Deine Antwort.

(Bollenbacher, 1987, zitiert nach Hemme, 2013, S.26)

****

Diese Aufgabe zählt zu den wahrscheinlich leichteren Aufgaben des Fragebogens. Sie kann auf verschiedene Arten gelöst werden. Eine Möglichkeit wäre, die beiden Flächen jeweils mit Hilfe der Flächenformel für Dreiecke $F = \frac{a \cdot h_a}{2}$ zu berechnen oder nur aufzustellen, um zu erkennen, dass die beiden Flächen gleich groß sind, da die Höhe des Dreieckes auf die Länge (beziehungsweise Breite) des Quadrats die Hälfte der Breite (beziehungsweise Länge) des Quadrats ist und somit gilt: $A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{a \cdot b}{4} = \frac{b \cdot h_b}{2} = B$, wobei a und b die Länge und Breite des Rechtecks bezeichnen. Da diese Argumentation gänzlich ohne die angegebenen Seitenlängen auskommt, kann die Zusatzfrage leicht mit „nein" beantwortet werden.

Es gibt noch einige weitere Möglichkeiten. Für visuelle Typen eignet sich zum Beispiel ein Ein- und Umzeichnen in der Grafik.

Dazu könnte man die zwei Dreiecke jeweils halbieren. Sofort erkennt man aus der Zeichnung, dass diese Dreieckshälften jeweils rechtwinkelige Dreiecke mit den gleichen Seitenlängen sind, und zwar die Hälfte der Breite, die Hälfte der Länge und die Hälfte der Diagonale. In der folgenden Abbildung sind diese Dreiecke kräftig eingefärbt. Da die Hälften von A und B gleich groß sind, müssen also auch A und B selbst die gleiche Fläche haben, folglich ist das Verhältnis 1:1.

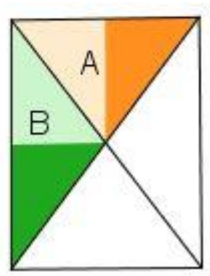


Abbildung 9: möglicher Lösungsweg zu Aufgabe 6

Wer die Flächengleichheit der dunkel eingefärbten Dreiecke nicht gleich erkennt, könnte auch das dunkelorange gefärbte Dreieck $\frac{A}{2}$ drehen und auf das zart hellgrün gefärbte Dreieck $\frac{B}{2}$ legen und damit ein kleines oranges Rechteck bilden. Dabei erkennt man, dass die Fläche von A also ein Viertel der gesamten Rechtecksfläche ist. Verfährt man mit B genauso, erhält man auch als Fläche von B ein Viertel der Rechtecksfläche. Somit sind A und B gleich groß.

Man könnte auch mehrere dieser A4-Blätter nebeneinanderlegen. Dabei würden dann durch zwei zusammenstoßende Flächen A und B jeweils zwei flächengleiche Rhomben entstehen, wie in der folgenden Abbildung zu erkennen ist. Diese haben jeweils die Fläche 2A = 2B. Folglich sind also auch A und B gleich groß. (Hemme, 2003, S. 82)

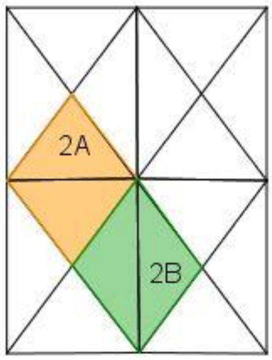


Abbildung 10: möglicher Lösungsweg zu Aufgabe 6

7.2.7 Reflexion 1

Im Anschluss an den schriftlichen Aufgabenteil gibt es einen weiteren Fragebogen. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler angeben, ob sie ein Beispiel bearbeitet haben, wie sie ihre Lösung sowie die Aufgabe selbst einschätzen oder warum sie sie nicht bearbeitet haben.

Ich habe Aufgabe 2 bearbeitet.	○ ja		○ nein	
Falls NEIN: Warum nicht?	○ keine Zeit	○ verstehe die Aufgabe nicht	○ anderer Grund: ______________________	
Falls JA: Wie gut hast Du Deiner Meinung nach die Aufgabe gelöst?	○ sehr gut (sicher richtig)	○ eher gut	○ eher nicht gut	○ schlecht (sicher falsch)
Falls JA: Wie schwierig war die Aufgabe für dich?	○ sehr einfach	○ eher einfach	○ eher schwierig	○ sehr schwierig

Abbildung 11: Reflexionsfragen

Dabei soll vor allem die Selbsteinschätzung untersucht werden. Man kann erwarten, dass sich die Schülerinnen und Schüler der Gruppe α grundsätzlich genauer einschätzen können, da sie ähnliche Aufgabentypen des Öfteren bearbeiten, andererseits kann auch das Umgekehrte eintreffen, falls sie zu „kritisch" sich selbst gegenüber sind.

Interessant wird auch sein, ob die Wettbewerbsschüler die Aufgaben grundsätzlich als einfacher empfinden, was angenommen werden kann.

Am Ende dieses Fragebogens soll noch angegeben werden, welche der Aufgaben ihnen besonders gut gefallen hat oder haben und welche nicht. Dies ermöglicht Schlüsse daraus zu ziehen, welche Aufgabentypen und welcher Schwierigkeitsgrad am beliebtesten bei den Schülerinnen und Schülern sind. Möglicherweise entscheidet sich Gruppe β tendenziell für leichtere Aufgaben als neliebtere, während Gruppe α auf „interessantere" Aufgaben Wert legt.

7.3 Mündliche Aufgaben

Im mündlichen Teil bekommen die Schülerinnen und Schüler die Anweisung, möglichst alle Gedankengänge laut mitzusprechen.

7.3.1 Aufgabe 7

****

Auf dem Zahlenstrahl liegen zwischen den beiden Primzahlen 23 und 29 genau fünf andere Zahlen, die alle keine Primzahlen sind. Sie sind das kleinste Primzahlenpaar mit dieser Eigenschaft, das nächstgrößere Paar sind 31 und 37.

Gibt es zwei Primzahlen, zwischen denen auf dem Zahlenstrahl genau zehn Zahlen liegen, die wiederum keine Primzahlen sind? Falls ja: Finde das kleinste Primzahlenpaar, für das dies gilt.

Begründe Deine Antwort!

(McMillan, 1967, zitiert nach Hemme, 2013, S. 59)

****

Diese Aufgabe ist in der Quelle anders formuliert, und zwar so, dass nur nach den beiden kleinsten Primzahlen gefragt wurde, zwischen denen auf dem Zahlenstrahl genau zehn Zahlen liegen, die wiederum keine Primzahlen sind. Da die Aufgabe aber nach etwas fragt, was nicht existieren kann, was für viele Schülerinnen und Schüler irreführend und möglicherweise auch demotivierend sein kann, wurde sie geändert, um mehr Beachtung auf die Frage nach der möglichen Existenz eines solchen Primzahlenpaares zu lenken.

Natürlich gibt es kein solches Primzahlenpaar, für das die oben genannte Voraussetzung gilt. Die Angabe ist bewusst etwas irreführend formuliert, doch es gilt zu erkennen, dass die Differenz zweier Zahlen, zwischen denen zehn andere Zahlen auf dem Zahlenstrahl liegen, genau elf ist. Dann fällt sofort auf, dass bei Differenz elf genau eine der beiden Zahlen gerade sein muss. Bis auf die Zahl 2 sind Primzahlen jedoch stets ungerade. Überprüft man das Paar 2 und 13, so gilt zwar die Voraussetzung, dass zwischen ihnen zehn andere Zahlen liegen, doch unter ihnen gibt es Primzahlen, folglich ist diese Bedingung nicht erfüllt. Also kommt man zu dem Schluss, dass es kein solches Paar geben kann.

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, die Denkweisen der Schülerinnen und Schüler zu verstehen und zu überprüfen, bei welchen Gedankenschritten sie eventuell Hilfe brauchen. Aufgrund der möglicherweise zu gebenden Hilfestellung wurde die Aufgabe für den mündlichen Teil ausgewählt.

7.3.2 Aufgabe 8

Bei diesem Würfelspiel finden die Schülerinnen und Schüler dreimal jeweils neun Kästchen vor, die aus drei Zeilen und drei Spalten bestehen. Die Regeln dieses Spiels werden mündlich erklärt.

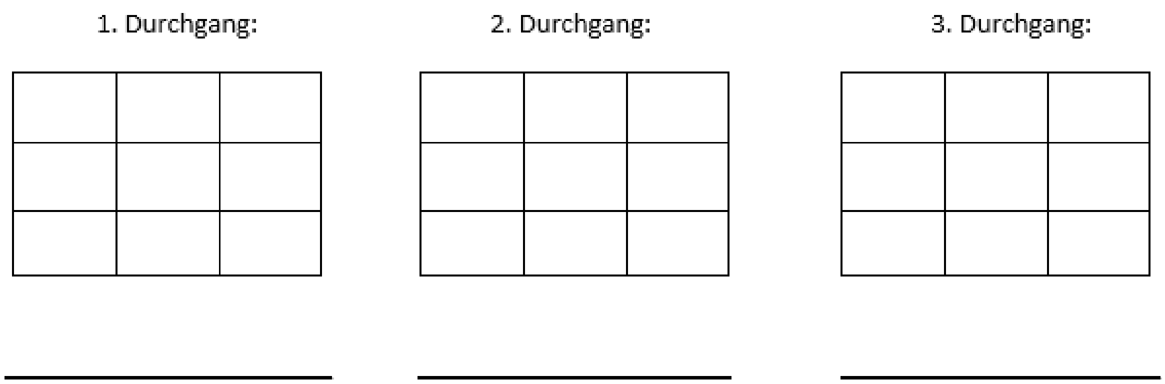


Abbildung 12: Aufgabe 8

Der Spielleiter oder die Spielleiterin würfelt neun Mal mit einem fairen Würfel mit den Ziffern eins bis sechs. Sofort nach jedem Wurf muss die Spielerin oder der Spieler die gewürfelte Ziffer in ein Kästchen eintragen, mit dem Ziel, dass am Ende jedes Durchgangs bei Addition der drei dreistelligen Zahlen, die die Ziffern einer jeden Zeile bilden, eine Summe bilden, die jedenfalls kleiner als 1000 sein muss, allerdings möglichst nahe an 1000 sein soll. Die „perfekte Lösung“

wäre also 999, jedoch wäre zum Beispiel 980 besser als 1001. (Quelle unbekannt, ähnlich wie: Hölken, 2011)

Das Spiel wird drei Mal gespielt, wobei nach jedem Durchgang kurz besprochen werden soll, mit welcher Strategie vorgegangen wurde und was für die eventuell noch folgenden Durchgänge verbessert werden kann.

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Verbesserung der Strategie bei wiederholtem Spielen festzustellen und für Erkenntnisgewinn, Erfolg und Motivation zu sorgen. Um einen Vergleich aufzustellen, welche Schülerinnen und Schüler bei welchem Durchgang welche Summe erhielten, wird nicht direkt vor Ort gewürfelt, sondern eine fertig angefertigte Ziffernfolge vorgelesen. Andernfalls kann es durch Glück oder Pech passieren, dass die beste oder schlechteste Strategie gute oder schlechte Ergebnisse hervorbringt.

Fragen, die die Schülerinnen und Schüler beantworten sollten (falls sie die Antwort nicht ohnehin bei der Beschreibung ihrer persönlichen Strategie schon gegeben haben), sind etwa folgende:

- Welche Felder versuchst Du, zuerst zu befüllen und welche lässt Du am besten für den Schluss übrig?
- Welche Ziffern sollten in der ersten Spalte stehen?
- Empfindest Du Deine Strategie in diesem Durchgang (oder grundsätzlich) als mutig, vernünftig oder vorsichtig?
- Wie kannst Du Deine Strategie noch verbessern, um bessere Ergebnisse zu erzielen?

7.3.3 **Reflexion 2**

Wie bei der Reflexion nach dem schriftlichen Teil müssen die Schülerinnen und Schüler auch nach dem mündlichen Teil angeben, wie sie sich einschätzen und wie schwierig sie die Aufgaben fanden. Zusätzlich dazu wird in einem kurzen Reflexionsgespräch noch nachgefragt, ob und was ihnen an den Aufgaben gefallen hat beziehungsweise was ihnen allgemein an Mathematikaufgaben gefällt.

8 Analyse der Befragungen

In diesem Teil der Diplomarbeit werden zuerst die Befragungsergebnisse beider Testgruppen getrennt voneinander betrachtet, ehe sie in Kapitel 8.3 miteinander verglichen und Schlüsse daraus gezogen werden.

8.1 Gruppe α

Die Schülerinnen und Schüler, die am 25. „Mathematical Duel“ Wettbewerb teilnahmen, wurden am Freitag, den 10. März 2017 im Rahmen ihres „Unitages“ schriftlich befragt. Die mündlichen Befragungen fanden teilweise bereits am Mittwoch, den 8. März 2017, nach dem Einzel- und Teamwettbewerb im Hotel Novapark in Graz statt. Die restlichen, vor allem jüngeren Teilnehmerinnen und Teilnehmer wurden am Freitag vor oder nach der schriftlichen Testung befragt.

Es wurde allen Schülerinnen und Schülern mehrfach mitgeteilt, dass sie über die Inhalte der Befragungen nicht sprechen durften, um Chancengleichheit für alle zu bewahren. Es gab auch bei der mündlichen Befragung keinerlei Hinweise darauf, dass jemand die Angaben vorab schon gekannt hatte.

In diesem Kapitel werden die Antworten, Lösungshäufigkeiten und Strategien der Gruppe α analysiert, zuerst der schriftliche, danach der mündliche Teil.

8.1.1 Persönlicher Fragebogen

Beim persönlichen Fragebogen zu Beginn der schriftlichen Testung gab es durchwegs ziemlich eindeutige Aussagen. Fasst man die Antworten „stimme eher zu“ und „stimme sehr zu“ beziehungsweise „stimme eher nicht zu“ und „stimme gar nicht zu“ jeweils zusammen, ergeben sich bei allen Fragen Mehrheiten mit mindestens vier Antworten Unterschied (das bedeutet, die knappsten Ergebnisse gingen mit 41,7% zu 58,3% aus).

Die überwiegende Mehrheit jener Schülerinnen und Schüler der Gruppe α besucht seit mindestens drei Jahren den Mathematik-Olympiade-Kurs, nämlich 18 von 24. Davon gaben fünf an, ihn sogar seit über fünf Jahren zu besuchen. Auffallend ist, dass alle befragten Personen der Gruppe α eher oder sehr zustimmten, dass sie gerne in den Mathematik-Olympiade-Kurs gingen, davon kreuzten acht das „eher“ und 16 das „sehr“ an. Der Aussage, dass die Inhalte des Kurses sie interessieren, stimmten 20 sehr zu, vier stimmten eher zu.

21 stimmten der Aussage, dass sie Rätsel- und Knobel-Aufgaben mögen, sehr zu, drei stimmten eher zu. Das zeigt, dass alle Befragten der Gruppe α solchen Aufgaben positiv gegenüberstehen.

14 gaben an, sich oft (13) oder sehr oft (1) in ihrer Freizeit mit Mathematik zu beschäftigen, neun gaben „selten“ an und nur einer oder eine beschäftigt sich nie damit.

Das grundsätzliche Mathematikinteresse ist unter den Befragten sehr hoch: 17 stimmten sehr, sechs eher zu. Eine befragte Person gab jedoch an, grundsätzlich nicht an Mathematik interessiert zu sein. Diese Person dürfte jedoch zumindest an der Schulmathematik interessiert sein, da Mathematik zu den Lieblingsfächern zählt und sie sehr gerne in den Mathematik-Olympiade-Kurs geht. Möglicherweise wurde in diesem Fall die Frage nach dem Mathematikinteresse anders interpretiert, denn die anderen Antworten würden dafürsprechen, oder es liegt ein besonderer Fall vor.

Für eine einzige befragte Person zählt Mathematik eher nicht zu den Lieblingsfächern, fünf stimmten eher zu und 18 stimmten sehr zu, dass es zu den Lieblingsfächern in der Schule zählt.

Die Nervosität vor Mathematischen Wettbewerben ist eindeutig verschieden zu jener vor Mathematik-Schularbeiten. 14 Befragte gaben an, vor Schularbeiten gar nicht nervös zu sein, sieben eher nicht und nur drei Schülerinnen oder Schüler stimmen eher oder sehr zu, davor nervös zu sein. Bei Wettbewerben stimmen zwei sehr, acht eher, zehn eher nicht und vier gar nicht zu. Dadurch kann festgehalten werden, dass die grundsätzliche Nervosität bei mathematischen Wettbewerben bei dieser Gruppe deutlich höher ist als bei Mathematik-Schularbeiten, was unter anderem auch mit Unterforderung zu tun haben kann. Allgemein kann festgestellt werden, dass die Älteren und damit Routinierteren grundsätzlich weniger nervös vor Wettbewerben und Schularbeiten zu sein scheinen als die Jüngeren.

Es gaben 23 Befragte an, oft (13) oder sehr oft (10) im Mathematikunterricht unterfordert zu sein. Ein einziges Mal wurde „selten“ angekreuzt. Dazu kommt, dass 13 angaben, dass ihre Mathematiklehrerin oder ihr Mathematiklehrer „eher nicht“ begabte und interessierte Schüler fördere, bei zwei wurde sogar „gar nicht“ angekreuzt. Fünf stimmten allerdings sehr und vier eher zu, dass solche Schülerinnen und Schüler durchaus gefördert werden. Eine Mehrheit von 15 Befragten gab zudem an, dass die Mathematiklehrerin oder der Mathematiklehrer öfter begabte und interessierte Schülerinnen und Schüler fördern sollte. Zu diesen begabten und interessierten Schülerinnen und Schülern zählten sich 22, wobei zwölf „sehr" und zehn „eher" ankreuzten. Die zwei, die sich „eher nicht" zu diesen zählten, gehörten zu den jüngsten der Befragten, jene der Wettbewerbskategorie C.

Zusammenfassend kann zu diesen Fragen beziehungsweise Antworten also gesagt werden, dass jene Schülerinnen und Schüler, die einen Mathematik-Olympiade-Kurs besuchen und an Wettbewerben wie dem „Mathematical Duel" teilnehmen, sich im Regelunterricht unterfordert fühlen und ihrer Meinung nach auch zu wenig gefördert werden. Mathematik zählt großteils trotzdem zu ihren Lieblingsfächern. Diese extra angebotenen Mathematik-Olympiade-Kurse scheinen unter den Teilnehmerinnen und Teilnehmern großen Anklang zu finden und sind als Förderung von begabten und interessierten Schülerinnen und Schülern kaum wegzudenken.

8.1.2 **Aufgabe 1**

Nur zwei Befragte schafften es, diese Aufgabe in nur zwei Minuten vollständig korrekt zu lösen. 4 Schülerinnen und Schüler fanden den Trick, dass 12,5 auch als $\frac{100}{8}$ geschrieben werden kann, waren aber teilweise zu langsam oder zu ungenau in der Ausführung.

Eine befragte Person berechnete nur das Doppelte der zu multiplizierenden Zahl und versuchte, das Ergebnis durch geschicktes Addieren wie folgt zu erhalten (81624324048566472808 wird im Folgenden mit Z bezeichnet): $10 \cdot Z + 2 \cdot Z + 0{,}2 \cdot Z + 0{,}2 \cdot Z + 0{,}1 \cdot Z$, wobei das Zehnfache durch einfaches Anhängen einer Null sowie das 0,1- beziehungsweise 0,2-fache durch Setzen eines Kommas vor der letzten Ziffer erzeugt wurde. Mit dieser Methode musste also nur eine einzige „komplexere" Multiplikation und eine Addition durchgeführt werden. Für das komplette Ausführen dieser Lösungsstrategie war die Zeit allerdings zu kurz.

Eine weitere getestete Person erkannte mit hoher Sicherheit zumindest, dass die zu multiplizierende Zahl nach einem bestimmten Schema aufgebaut ist, konnte somit sehr schnell multiplizieren und scheiterte schlussendlich nur an der knapp bemessenen Zeit von zwei Minuten, sodass der letzte Rechenschritt nur etwa zur Hälfte gelöst werden konnte.

Von diesen 6 Schülerinnen und Schülern, die also zumindest sehr nahe an der korrekten Lösung waren, waren 4 aus der Wettbewerbskategorie A und die übrigen 2 aus B. Alle 6 Schülerinnen und Schüler gaben an, seit mindestens 3 bis 4 Jahren den Mathematik-Olympiade-Kurs zu besuchen. Bei diesem Beispiel scheint Routine eine große Rolle zu spielen, da die Älteren und Erfahreneren schneller erkennen, welche Zahl einfach als Bruch geschrieben werden kann.

Die Tatsache, dass so wenige Befragte einen Trick fanden, entspricht nicht der Erwartung, dass eine derartige Lösungsmöglichkeit schneller gefunden werden könne.

Aufgrund der geringen Anzahl von richtigen Lösungen wurden bei dieser Aufgabe zu Vergleichszwecken auch die Lösungen der Schülerinnen und Schüler der anderen teilnehmenden Schulen aus Bílovec, Přerov und Chorzów herangezogen.

Dabei haben nur zwei Schülerinnen oder Schüler den Trick mit dem Umschreiben in $\frac{100}{8}$ angewandt, konnten aufgrund von kleinen Rechenfehlern beziehungsweise möglicherweise Zeitmangel die Aufgabe aber nicht korrekt lösen.

Drei weitere Ideen zur Berechnung waren zu entdecken:

1. Z wird mit 25 multipliziert und anschließend wird dies durch 2 geteilt.
2. Z wird verzehnfacht und anschließend durch 4 dividiert. Dieser Quotient wird anschließend zum verzehnfachten Z addiert. Hierbei kann ausgenutzt werden, dass sich Z sehr einfach durch 4 teilen lässt – äquivalent zum Achteln beim „Bruch-Schreibweisen-Trick“.
3. Z wird mit 5 multipliziert und dieses Produkt anschließend geteilt, um 2,5 zu erhalten. Offenbar wollte man dies dann zur verzehnfachten Zahl Z addieren.

Bei keiner dieser Varianten kam der oder die Befragte zum Ergebnis, da die Zeit dafür zu kurz gewesen zu sein scheint.

Erwähnenswert ist die Antwort einer befragten Person, die offenbar rasch bemerkte, dass die Zeit nicht ausreichen würde und daher eine Schätzung vornahm. Dabei wurde Z durch $8 \cdot 10^{19}$ abgeschätzt und die Multiplikation somit durch $8 \cdot 125 \cdot 10^{18}$. Als näherungsweises Ergebnis wurde dann „ca. 10^{21}“ angegeben, da $8 \cdot 125$ gleich 1000 ist.

Zusammenfassend besteht bei dieser Aufgabe kein großer Unterschied in der Häufigkeit des Findens von anderen Lösungsstrategien zwischen den österreichischen Schülerinnen und Schülern und jenen der anderen Schulen.

Bei dieser Aufgabe ging es vor allem darum, herauszufinden, ob Schülerinnen und Schüler in kurzer Zeit auf eine Idee kommen. Dass verhältnismäßig wenige der Befragten überhaupt eine Idee angaben, und der Großteil tatsächlich durch schnelles Multiplizieren versuchte, auf eine Lösung zu kommen, ist durchaus überraschend.

Beim Reflexions-Fragebogen am Ende der schriftlichen Befragung kam Aufgabe 1 nicht vor, da sie erstens sofort nach dem Bearbeiten eingesammelt wurde und zweitens die Antwort bei der Reflexion nicht so viel Aussagekraft hätte wie bei den anderen Aufgaben, denn es ist offensichtlich, ob man auf ein Endergebnis kommt oder nicht.

8.1.3 **Aufgabe 2**

Von allen 24 befragten Schülerinnen und Schülern haben 21 dieses Beispiel korrekt gelöst. Die Schülerinnen und Schüler konnten durchwegs schlüssig argumentieren, wie sie auf das Ergebnis von 65° gekommen waren. Die Winkelsumme im Dreieck sowie die Eigenschaften von gleichschenkeligen Dreiecken ist jenen Schülerinnen und Schülern aus Gruppe α also großteils so geläufig, dass diese Aufgabe von den meisten gut gelöst werden konnte.

14 Befragte fanden die Aufgabe sehr einfach, fünf weitere eher einfach. Alle Schülerinnen und Schüler der Wettbewerbskategorien A und B, die diese Aufgabe korrekt gelöst hatten, gaben auch an, das Gefühl zu haben, sie hätten sie sehr gut gelöst. In der Kategorie C beantworteten zwar auch sechs von acht die Frage richtig, allerdings gab nur eine befragte Person an, die Aufgabe ihrer Meinung nach sehr gut gelöst zu haben. Alle anderen empfanden ihre Lösung als „eher gut“ oder „eher nicht gut“. Auch bei dem Empfinden der Schwierigkeit waren deutliche Unterschiede zu erkennen: Während in den Kategorien A und B nur vereinzelte Schülerinnen und Schüler angaben, dass sie die Aufgabe nicht sehr einfach, sondern eher einfach empfanden, so lag der Durchschnitt in der Kategorie C von jenen, die die Aufgabe korrekt beantwortet hatten, genau zwischen „eher gut“ und „eher nicht gut“.

8.1.4 **Aufgabe 3**

Diese Aufgabe wurde von 17 Schülerinnen und Schülern richtig gelöst.

Bei einigen Lösungsversuchen findet man die Überprüfung, ob das gegebene Dreieck rechtwinkelig ist, was aufgrund der nicht maßstabsgetreuen Skizze so aussieht. Wäre dies der Fall gewesen, hätten sie wahrscheinlich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras die Länge der Linien berechnet.

Neun Befragte haben das Dreieck zu einem Parallelogramm ergänzt, wobei die Mehrheit davon das Dreieck „nach unten hin“ ergänzt hat, sodass die längste Dreiecksseite zur Diagonale des Parallelogramms wird. Somit verlängerten sie auch die eingezeichneten Linien wie in der

Erklärung der Aufgabe in Kapitel 7.2.3 beschrieben. Allerdings erhielten nur sieben von diesen neun das Ergebnis von 25, die anderen machten Denk- oder Rechenfehler auf dem Weg zum Ergebnis.

Weitere Befragte argumentierten direkt damit, dass sich die kürzeste mit der längsten Linie auf 5 ergänzt und die jeweils anderen ebenso und damit 5 Linien der Länge 5 entstehen würden. Dies entspricht dem ebenso in Kapitel 7.2.3 beschriebenen Weg, der äquivalent zur geometrischen Veranschaulichung der Gaußschen Summenformel ist.

Ein oder eine Befragte der Wettbewerbskategorie C argumentierte wie folgt:

Die Länge der eingezeichneten Linien nimmt gleich viel ab, da sie parallel und gleich breit sind. → Die längste und die kürzeste Linie sind also zusammen 5cm lang. Dasselbe gilt für die 2.größte und 2.kleinste Linie […]. → Also 5 Paare, die 5cm lang sind. → $5 \cdot 5 = 25$cm. A: Die eingezeichneten Linien sind zusammen 25cm lang.

Eine ähnliche Idee hatte eine Schülerin oder ein Schüler, indem auf halber Höhe des Dreiecks eine parallele Gerade gezeichnet wurde. Argumentiert wurde weiter, dass die Linienstücke, die sich über dieser eingezeichneten Geraden befinden, sich mit jenen unter der Geraden auf jeweils die Länge von 2,5cm ergänzen und sich somit durch 10 Linien mit je 2,5cm Länge eine Gesamtlänge von 25cm ergibt.

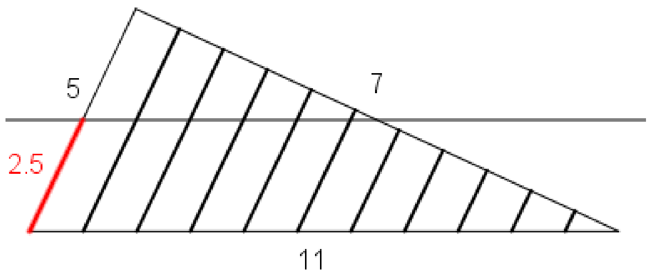


Abbildung 13: gefundener Lösungsweg zu Aufgabe 3

Mit Hilfe des Strahlensatzes haben mehrere andere Befragte die Gesamtlänge berechnet.

Eine Möglichkeit wäre folgende, von einer befragten Person ausgeführt:

Die eingezeichneten Linien werden mit a bis j bezeichnet (vergleiche mit Abbildung 14). Somit ergibt sich die Gesamtlänge dieser Linien durch $G = a + b + c + d + e + f + g + h + i + j$. Die 11 waagrechten Teilstücke haben jeweils die Länge 1.

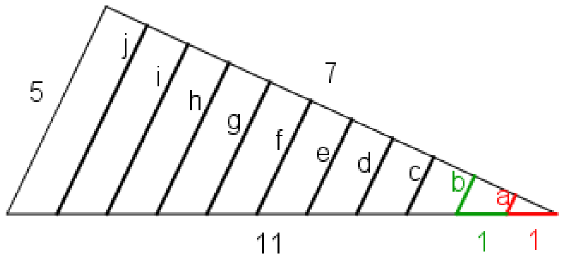


Abbildung 14: möglicher Lösungsweg zu Aufgabe 3

Nach dem Strahlensatz gilt dann $\frac{a}{5}=\frac{1}{11}$ sowie $\frac{b}{5}=\frac{2}{11}$ und so weiter. Damit ergibt sich für die Gesamtlänge:

$$G=\frac{5}{11}+\frac{10}{11}+\frac{15}{11}+\frac{20}{11}+\frac{25}{11}+\frac{30}{11}+\frac{35}{11}+\frac{40}{11}+\frac{45}{11}+\frac{50}{11}=\frac{5\cdot 55}{11}=25$$

Hierbei wurde wiederum erkannt, dass sich die Brüche miteinander auf $\frac{55}{11}$ ergänzen, diesmal jedoch nicht geometrisch betrachtet.

Ein weiterer, im ersten Moment etwas kompliziert erscheinender Lösungsweg sei an dieser Stelle erwähnt. Die befragte Person erkannte, dass die eingezeichneten Linien gleichmäßig kürzer werden und sich die Länge der Linien jeweils um $\frac{5}{11}$ verringert. Dies wurde mit Hilfe der Gleichung $5-x\cdot 11=0$ errechnet. Damit lässt sich die Gesamtlänge wie folgt berechnen:

$$G=5\cdot 10-1\cdot\tfrac{5}{11}-2\cdot\tfrac{5}{11}-3\cdot\tfrac{5}{11}-\ldots-8\cdot\tfrac{5}{11}-9\cdot\tfrac{5}{11}-10\cdot\tfrac{5}{11}=$$

$$=50-55\cdot\frac{5}{11}=50-25=25$$

Diese Lösungsidee kommt ohne die direkte Anwendung des Strahlensatzes aus, wobei aber auch diese Argumentation darauf beruht. Beim Reflexionsbogen wurde in diesem Fall angegeben, dass die Aufgabe „eher einfach“ für sie oder ihn war.

Eine weitere befragte Person schrieb: „Ich weiß nicht, wie ich es ausrechnen würde“. Dafür konstruierte sie mit Hilfe eines Lineals und eines Zirkels das Dreieck und maß die Linien ab. Dabei gab sie 24,6cm als ungefähre Gesamtlänge an. In der Angabe war nicht dezidiert gefordert, dass man die Länge berechnen musste. Die Schülerin oder der Schüler hatte also einen eigentlich gültigen Lösungsweg gewählt und nur durch Ungenauigkeiten ein etwas falsches Ergebnis erhalten.

Drei Befragte gaben beim Reflexionsbogen an, die Aufgabe nicht bearbeitet zu haben, zwei davon, weil sie keine Zeit mehr hatten und eine oder einer, da sie oder er nicht wusste, wie die Aufgabe zu lösen sei.

8.1.5 Aufgabe 4

Diese Aufgabe zählte offenbar zu den etwas schwierigeren Aufgaben – sie wurde von 12 Befragten korrekt gelöst. Bemerkenswert ist, dass acht verschiedene Möglichkeiten gefunden wurden, diese Aufgabe zu lösen.

Jene Möglichkeiten, die in Kapitel 7.2.4 präsentiert wurden, wurden unter anderem auch gefunden. Zwei Befragte der Wettbewerbskategorie A fanden als erstes die Möglichkeit mit den 4 größeren Quadraten und den 25 kleineren an zwei Außenseiten. Zwei andere Befragte (je eine oder einer aus den Kategorien A und B) wählten die Variante mit dem großen Quadrat in der Mitte und den 28 kleinen rundherum, welche auch eine korrekte Lösung für die Zusatzfrage darstellt.

Weitere zwei Befragte (wieder je eine oder einer aus A und B) fanden eine andere Anordnung der Quadrate, sodass auch 28 gleich große Quadrate entstehen (siehe Abbildung 15, beziehungsweise Drehungen davon). Eine Schülerin oder ein Schüler, die oder der als erste Methode jene mit den vier Quadraten innen gefunden hatte, gab diese Möglichkeit auch noch als Antwort auf die Zusatzfrage an.

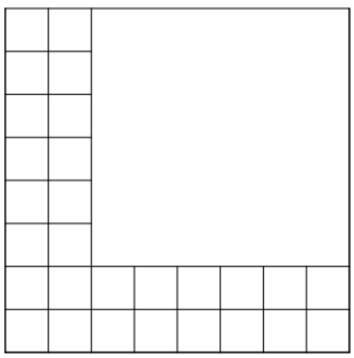


Abbildung 15: gefundene Möglichkeit zu Aufgabe 4

Ähnlich aufgebaut ist die Möglichkeit, die anstelle der 28 kleinen Quadrate, die in L-Form angeordnet sind, wie in Abbildung 15 der Fall, nur 20 Quadrate auf diese Art anordnet (mit je einer Seitenlänge von einem Sechstel der Seitenlänge des Ursprungsquadrates). In das große Quadrat müssen dann noch 9 Quadrate (drei mal drei) eingezeichnet werden, um die 29 zu erhalten.

Eine befragte Person stellte Überlegungen an, mit welchen „Teilmengenkombinationen" aus einem Quadrat 29 erzeugt werden können. Die Denkweise beruht darauf, dass Quadrate stets in eine andere Anzahl von Quadraten zerteilt werden können, und zwar in jene der Quadratzahlen. So können durch die Vierteilung eines Quadrates drei weitere hinzugefügt werden. Teilt man ein Quadrat in neun gleich große Quadrate, erhöht sich die Anzahl der Quadrate um acht, da das zerteilte Quadrat nun nicht mehr mitgezählt werden kann.

Mit dieser Strategie wurde das große Ursprungsquadrat zuerst geviertelt und jedes Viertel dann betrachtet: Zwei davon mussten in je neun Quadrate zerteilt werden und zwei in vier. Damit kommt man auf 26 Quadrate. Nun muss man nur noch ein beliebiges Quadrat vierteilen, um die übrigen drei zu erhalten (vergleiche mit Abbildung 16).

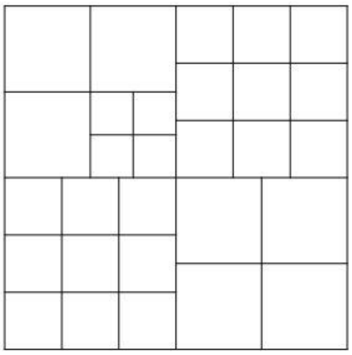


Abbildung 16: gefundene Möglichkeit zu Aufgabe 4

Eine weitere Möglichkeit, die von einer befragten Person gefunden wurde, ist jene, wie sie in Abbildung 17 zu sehen ist. Sie ist vom Prinzip her anders aufgebaut als die vorherigen. Leider sind bei der Lösung keine detaillierten Gedankenschritte zu erkennen, weshalb nur vermutet werden kann, wie sie oder er auf die Möglichkeit gekommen ist. Hierbei wird die linke Hälfte des Quadrats in zwei Quadrate zerteilt und die rechte in drei mit einem Drittel der Seitenlänge des großen Quadrats und in zwei mal zwölf mit einem Zwölftel der Seitenlänge.

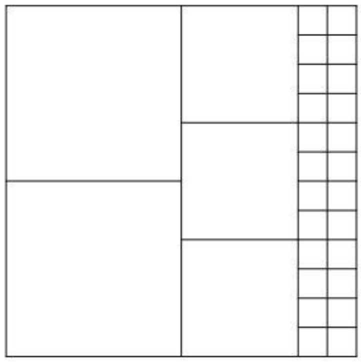


Abbildung 17: gefundene Möglichkeit zu Aufgabe 4

Zwei Befragte kamen durch geschicktes Probieren auf die Lösung. Man kann erkennen, dass ausradiert beziehungsweise durchgestrichen wurde. Wie auch bei anderen Lösungsversuchen, die keine korrekte Lösung ergaben, findet man sehr häufig fehlgeschlagene Versuche mit 28 erzeugten Quadraten. Wie in Abbildung 18 und Abbildung 19 erkennbar ist, wurde teilweise systematisch, teilweise wohl „auf gut Glück" probiert und ein Ergebnis gefunden.

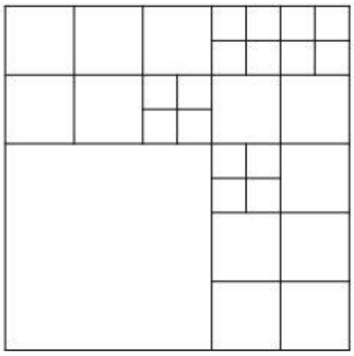


Abbildung 18: gefundene Möglichkeit zu Aufgabe 4

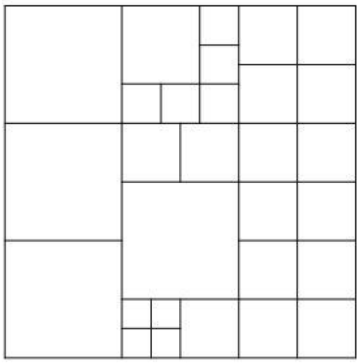


Abbildung 19: gefundene Möglichkeit zu Aufgabe 4

Einige Befragte stellten theoretische Überlegungen an, wie sie auf die Summe 29 kommen könnten. Dabei war nicht zu übersehen, dass Schülerinnen und Schüler, die an Wettbewerben teilnehmen und in Kursen darauf hintrainieren, sofort an die Quadratzahlen dachten und überlegten, wie man sie miteinander kombinieren und addieren könnte, um 29 zu erhalten. Selbstverständlich können nicht nur Quadratzahlen miteinander addiert werden. Was jedoch oftmals nicht bedacht wurde, war eben das Addieren von beispielsweisen drei Quadraten, wenn man ein kleines Quadrat erneut in vier Teile teilt, und dass sich damit viel mehr Möglichkeiten ergeben.

Eine Befragte oder ein Befragter argumentierte so, dass eine Zerteilung eines Quadrats in kleinere (gleich große) Quadrate sowohl eine gerade als auch eine ungerade Anzahl an Quadraten ergeben kann. Da die Zahl 29 ungerade ist, muss bei einer Addition eine gerade mit einer ungeraden Zahl addiert werden (beziehungsweise mehrere in Gruppen zusammengefasst). Sie oder er schrieb daraufhin verschiedene Additionen auf, die jeweils 29 ergaben, kam aber praktisch nicht auf eine geeignete Lösung. Bei der Reflexion wurde angegeben, dass aufgrund von Zeitknappheit nicht weiter an der Lösung gearbeitet werden konnte.

Zwei Befragte versuchten, eine allgemeine Methode zu finden. Dabei versuchten beide, das Quadrat nach einem gewissen Schema in sehr viele kleinere Quadrate zu teilen und anschließend Linien wieder so weg zu streichen, sodass nur 29 Quadrate übrigbleiben. Diese Methode kann für gewisse, gut gewählte Quadratanzahlen funktionieren, zählt jedoch nicht als korrekte Lösung, da keine konkrete Lösung angegeben wurde.

Die Zusatzaufgabe, die darin bestand, eine Möglichkeit zu finden, in der möglichst viele der 29 Quadrate gleich groß sind, lösten fünf Schülerinnen und Schüler korrekt, davon kamen vier aus der Wettbewerbskategorie A. Zwei fanden jene bei der Aufgabenanalyse vorgestellte Möglichkeit, bei der das große Quadrat in der Mitte ist und die 28 rundherum angeordnet sind. Drei fanden eine Drehung des Quadrates, bei dem 28 kleine als L-Form angeordnet sind (siehe Abbildung 15).

Jene Schülerin oder jener Schüler, der die Variante wie in Abbildung 16 gefunden hatte, gab an, dass diese Möglichkeit mit den 18 gleich großen Quadraten auch jene sei, die die Zusatzaufgabe beantworte. Diese Denkweise geht davon aus, dass man Quadrate grundsätzlich in eine Anzahl von Quadratzahlen zerteilen kann und bedenkt nicht, dass es Möglichkeiten gibt, die beispielsweise am Rand einige Quadrate nebeneinander eingefügt haben, wie eben die beiden Möglichkeiten, bei denen man tatsächlich auf 28 gleich große Quadrate kommt. Für die Methode mit Unterteilungen in je vier oder neun kleinere Quadrate scheint die Anzahl der 18 gleich großen Quadrate auch die Methode zu sein, bei der am meisten gleich große erzeugt werden können.

8.1.6 Aufgabe 5

Diese Aufgabe wurde von allen Schülerinnen und Schülern bearbeitet, konnte jedoch nur von der Hälfte korrekt gelöst werden, da sich oft ein kleiner Denk- oder Rechenfehler eingeschlichen hatte.

Diese Fehler waren beispielsweise das Nicht-Zählen der Null, dass also beispielsweise nur die Palindrome 111, 121, 131, …, 191 gezählt wurden und die 101 vergessen wurde. Einmal wurden fälschlicherweise auch Zahlen wie 1212, 1313 und 1414 als Palindrome gezählt und es passierte auch, dass nur vierstellige Palindrome gezählt wurden und ein-, zwei- und dreistellige vollkommen übersehen wurden.

Bei den Lösungsstrategien sind drei grundsätzliche Herangehensweisen zu beobachten:

1. Systematische Überlegungen und Berechnung:
   Dabei versuchten die Schülerinnen und Schüler den Aufbau von Palindromen allgemein darzustellen. Dazu ein paar ausgewählte Versionen:
   - Jede einstellige Zahl ist ein Palindrom → 9 Palindrome, da die Zahlen von 1 bis 9 zulässig sind.
     Zweistellige Zahlen der Bauart „ab“ sind Palindrome, wenn a = b gilt. → 9 Palindrome, da für a die Ziffern 1 bis 9 eingesetzt werden können.
     Dreistellige Zahlen der Bauart „abc“ sind Palindrome, wenn a = c gilt. Für a können die Ziffern von 1 bis 9 eingesetzt werden, für b zusätzlich noch die 0. → 90 Palindrome.
     Vierstellige Zahlen der Bauart „abcd“ sind Palindrome, wenn a = d und b = c gilt. Für a können wieder nur die Ziffern von 1 bis 9 eingesetzt werden, für b wieder jene von 0 bis 9. → 90 Palindrome
     Addiert man nun also 9+9+90+90, so erhält man die Gesamtanzahl von 198 Palindromen.

- Bei vierstelligen Palindromen sind an der ersten Ziffernstelle die Ziffern von 1 bis 9 möglich, an der zweiten jene von 0 bis 9. Die dritte und vierte Stelle folgt jeweils direkt aus der zweiten beziehungsweise der ersten Stelle, also gibt es 90 vierstellige Palindrome.

  Bei dreistelligen Palindromen gibt es für die erste Stelle wieder 9 Möglichkeiten und für die zweite erneut 10. Die dritte ist durch die erste bestimmt, also keine weiteren Möglichkeiten dadurch, daher gibt es 90 dreistellige Palindrome.

  Bei zweistelligen Palindromen können an der ersten Ziffernstelle wieder neun verschiedene Ziffern stehen, die zweite Stelle ist gleich wie die erste. Also gibt es 9 Möglichkeiten für zweistellige Palindrome, ebenso viele wie bei den einstelligen.

  In Summe ergibt das 198 Palindrome.

  Diese Möglichkeit wurde an dieser Stelle extra erwähnt, obwohl sie von der Struktur her ähnlich der vorangegangenen Methode ist. Allerdings schien sie durch die Überlegungen mit der Ziffernstelle, die visuell dargestellt wurden, erwähnenswert.

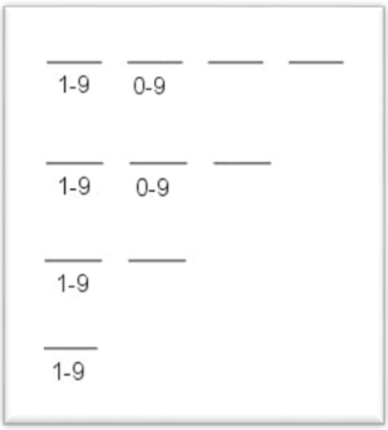


Abbildung 20: Visualisierung zu Aufgabe 5

- Die Zahlen von 1 bis 9 sind alle Palindrome, und noch weitere 9 bis 100 mit je zwei gleichen Ziffern von 1 bis 9. Wenn bei 10^n n ungerade ist, gibt es bei den Palindromen, die zwischen 10^{n-1} und 10^n liegen, jeweils eine mittlere Zahl, die alle Ziffern von 0 bis 9 annehmen kann. So zwischen 10^2 und 10^3: In diesem Bereich gibt es 90 Palindrome. Zwischen 10^3 und 10^4 gibt es jedoch wieder nur

90 Palindrome, weil die davor einzelne Zahl in der Mitte zwei Mal in der Mitte vorkommt und somit keine weitere Zahl und damit keine weiteren Möglichkeiten hinzukommen. Also gibt es insgesamt 198 Palindrome, die kleiner als 10^4 sind.

- Die Zahlen von 1 bis 9 sind alle Palindrome, und die Vielfachen von 11 sind weitere 9 Stück bis 100.
  Alle Zahlen mit lauter gleichen Ziffern (zum Beispiel 111) sind Palindrome, also gibt es von 100 bis 999 und von 1000 bis 9999 jeweils 9 Palindrome.
  Alle Zahlen der Bauart „1x1" sind Palindrome, wobei x ungleich 1 sein muss, da dieser Fall schon gezählt wurde. Dies kann man – wie oben als Beispiel mit der Zahl 1 angegeben – mit allen Ziffern von 2 bis 9 gleich ausführen, damit sind das 9 Möglichkeiten pro hundert Zahlen von 100 bis 1000, also 81 Palindrome dieser Bauart.
  Dasselbe Prinzip funktioniert auch bei vierstelligen Zahlen der Bauart 1xx1 (beziehungsweise 2xx2, 3xx3 usw.), wobei x wieder ungleich der Tausender-Ziffer sein muss. Man erhält pro „Tausenderschritt" 9 Palindrome, also weitere 81.
  Insgesamt gibt es also 9+9+9+9+81+81 = 198 Palindrome unter 10000.

- Einstellige Zahlen von 1 bis 9.
  Zweistellige Zahlen sind Palindrome, wenn folgende Gleichung gilt: $10a + b = 10b + a$, das ist äquivalent zur Gleichung $a = b$. Dafür gibt es 9 Möglichkeiten.
  Dreistellige Zahlen sind Palindrome, wenn folgende Gleichung gilt: $100a + 10b + c = 100c + 10b + a$, das ist äquivalent zur Gleichung $a = c$. Auch dafür gibt es erneut 9 Möglichkeiten. Für b gibt es 10 Möglichkeiten.
  Vierstellige Zahlen sind Palindrome, wenn folgende Gleichung gilt: $1000a + 100b + 10c + d = 1000d + 100c + 10b + a$, das entspricht dem Fall, dass $a = d$ und $b = c$ ist. Für b und c kann man alle zehn Ziffern einsetzen, für a und d kann man nur die Ziffern von 1 bis 9 einsetzen, da sonst die Vierstelligkeit nicht mehr gegeben ist. Also gibt es 90 vierstellige Palindrome.
  Insgesamt gibt es also 9+9+90+90 Palindrome unter 10000.

2. Durch Probieren beziehungsweise dezidiertes Aufschreiben von Palindromen auf ein System schließen:

    - Mit Hilfe einer matrixähnlichen Anordnung wurden die Zahlen systematisch notiert, wie beispielsweise die dreistelligen Zahlen wie folgt:

    $$\begin{matrix} 111 & 121 & 131 & \dots \\ 212 & 222 & 232 & \dots \\ 313 & 323 & 333 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

    In diesem Fall wurde leider die 0 als mögliche Ziffer an einer inneren Ziffernstelle vergessen.
    Mit Hilfe solcher Matrizen konnten die Zeilen- und Spaltenanzahl einfach eruiert werden.

    - Manche Schülerinnen und Schüler schrieben einige Palindrome auf, um daraus die Form zu erkennen, wie beispielsweise aus 101, 111, 121, 131, 141… erkennbar ist, dass dreistellige Palindrome der Bauart „xyx“ entsprechen.

3. Palindrome zum großen Teil aufschreiben und abzählen beziehungsweise durch Multiplikationen und Additionen auf ein Ergebnis kommen:

    Keine befragte Person schrieb tatsächlich alle Möglichkeiten konkret auf, allerdings waren ein paar wenige Schülerinnen und Schüler dabei, die nicht mit der Bauart oder der Systematik der Palindrome argumentierten, sondern lediglich die Zahlen addierten oder multiplizierten, wie beispielsweise folgende Methode zeigt:

    Zuerst wurden alle 18 Palindrome unter 100 aufgeschrieben, und dann jene von 100 bis 300. Daraus wurde gefolgert, dass es bei dreiziffrigen Zahlen immer zehn Palindrome pro hundert Zahlen gibt und von eins bis hundert 18.
    Anschließend wurden die Palindrome von 1000 bis 2000 aufgeschrieben und erkannt, dass es pro 1000 Zahlen jeweils zehn Palindrome gibt. Der Fehler, der an dieser Stelle dann passierte, ist, dass die Schülerin oder der Schüler diese zehn pro 1000 mit zehn multiplizierte, also nicht bedachte, dass sie oder er den ersten Tausender ja schon extra betrachtet hatte.

8.1.7 **Aufgabe 6**

Insgesamt konnten 22 von 24 Schülerinnen und Schülern diese Aufgabe lösen, damit ist sie die am öftesten gelöste Aufgabe der schriftlichen Befragung von Gruppe α.

Nur zwei Schülerinnen und Schüler lösten Aufgabe 6 durch Einzeichnen von Dreiecken, wie es zum Beispiel in Kapitel 7.2.6 in Abbildung 9 gemacht wurde, allerdings dachten sie an ähnliche Möglichkeiten und nicht an das Hinzufügen mehrerer Rechtecke, wie es bei Hemme (2003, S. 82) zu finden ist.

13 Befragte berechneten die Flächen der Dreiecke A und B, um auf die korrekte Lösung zu kommen, wobei einige die Zahlen einsetzten und damit die Gleichheit zeigten, während andere nur mit Variablen rechneten und damit auch die Zusatzaufgabe praktisch mitlösten.

Für die Berechnung der Fläche der Dreiecke A und B fanden die Schülerinnen und Schüler unterschiedliche Möglichkeiten:

- Die „klassische“ Dreiecks-Flächen-Formel $\frac{a \cdot h_a}{2}$: Dabei stellt man die Formeln für beide Flächen auf. $A_A = \frac{a \cdot h_a}{2}$ und $A_B = \frac{b \cdot h_b}{2}$. Man erkennt, dass h_a genau halb so lang wie b und h_b halb so lang wie a ist.

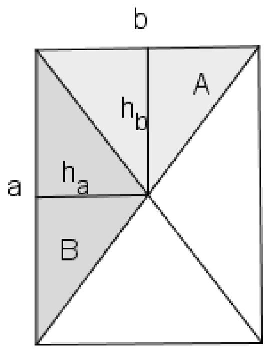


Abbildung 21: gefundene Idee zu Aufgabe 6

Ersetzt man also dies in der obigen Formel, so erhält man folgendes:

$$A_A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{a \cdot \frac{b}{2}}{2} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{b \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \mathrm{A}_B$$

Damit wurde gezeigt, dass die Flächen der Dreiecke A und B gleich groß sind. Also ist das Verhältnis 1:1. Da ausschließlich Variablen verwendet wurden, die in jedem

Rechteck existieren, wurde mit dieser Argumentation auch die Zusatzfrage korrekt beantwortet.

- A und B bestehen aus zwei Achteln des Rechtecks: Dabei werden zwei weitere Linien eingezeichnet, die jeweils zu einer Rechteckseite parallel sind und durch den Diagonalenschnittpunkt gehen. Gemeinsam mit den Diagonalen wird das Rechteck also nun in acht gleiche Dreiecke geteilt.

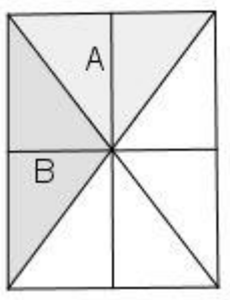


Abbildung 22: gefundene Idee zu Aufgabe 6

A und B bestehen jeweils aus zwei solcher Dreiecke. Also ist der Flächeninhalt von A und B jeweils $2 \cdot \frac{297 \cdot 210}{8} = \frac{297 \cdot 210}{4}$ und das Verhältnis somit 1:1. Die gleiche Argumentation führt auch zur Beantwortung der Zusatzfrage, dabei ersetzt man die konkreten Längenangaben am besten durch Variablen und erhält eine allgemeine Aussage.

- A und B haben gleiche Basis und Höhe: Da sich die beiden Diagonalen eines Rechtecks jeweils halbieren, wird speziell auch die Diagonale c im Diagonalenschnittpunkt halbiert.

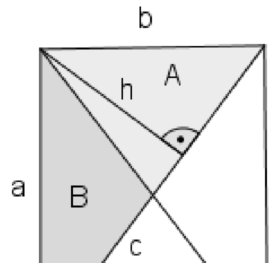


Abbildung 23: gefundene Idee zu Aufgabe 6

$\frac{c}{2}$ ist nun also sowohl die Basis des Dreiecks A als auch die Basis des Dreiecks B, und h ist die Höhe beider Dreiecke. Die Fläche eines Dreiecks kann stets mit der Formel

„Basis mal Höhe durch zwei“ berechnet werden, was in diesem Fall sowohl für A als auch für B bedeutet:

$$A_A = A_B = \frac{\frac{c}{2} \cdot h}{2}$$

Damit ist das Verhältnis 1:1 und die Zusatzfrage ebenso beantwortet.
Diese Strategie hätte gegenüber den anderen beiden einen Nachteil, wenn es darum ginge, den Flächeninhalt konkret ausrechnen zu müssen, da die Länge der Diagonalen c zuerst mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden müsste.

Eine weitere Möglichkeit, die von zwei Befragten gefunden wurde, ist jenen Möglichkeiten ähnlich, bei denen die Fläche der Dreiecke ausgedrückt wird. Bei dieser Lösung wurde jedoch nur argumentiert und keine Fläche konkret ausgedrückt:
Der Diagonalenschnittpunkt halbiert die Diagonalen, also ist die Fläche von A+B genau die Hälfte der Rechtecksfläche. Die Strecke $\overline{EM}$ halbiert wiederum die Fläche von A+B, da M der Mittelpunkt der Diagonalen ist und $\overline{EM}$ somit die Schwerlinie ist. Daraus folgt direkt, dass die Flächen von A und B jeweils gleich groß sind.

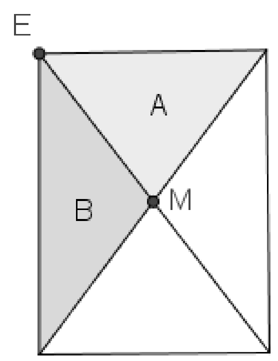


Abbildung 24: gefundene Idee zu Aufgabe 6

Die Zusatzaufgabe wurde sogar von 18 Schülerinnen und Schülern gelöst, darunter waren vier aus der Wettbewerbskategorie C, sechs aus Kategorie A und alle acht aus Kategorie B. Die Argumentationen waren jene, die in diesem Abschnitt bereits vorgestellt wurden, nur gegebenenfalls allgemeiner formuliert. Auffallend war, dass die Befragten größtenteils sehr genau folgerten und schlüssig argumentierten. Dies ist sicherlich ein Verdienst der Mathematik-Olympiade-Kurse, in denen genaues Argumentieren ein wichtiger Bestandteil ist.

8.1.8 **Anzahl der richtigen Lösungen im schriftlichen Teil (Aufgaben 1-6), Selbsteinschätzung und Lieblingsaufgaben**

Der Gesamtdurchschnitt der gelösten Aufgaben im schriftlichen Befragungsteil liegt bei 3,6 von sechs Aufgaben. Die Schülerinnen und Schüler der Wettbewerbskategorien A und B schafften jeweils durchschnittlich etwa 4 Beispiele, während die Jüngsten, jene der Kategorie C, durchschnittlich knapp drei Beispiele lösen konnten. Keine befragte Person konnte alle sechs Aufgaben komplett lösen, was allein schon wegen der geringen Anzahl von korrekten Lösungen von Aufgabe 1 nicht verwunderlich ist. Allerdings gibt es sechs Schülerinnen und Schüler, die fünf der Aufgaben komplett lösen konnten, je drei von ihnen sind in den Wettbewerbskategorien A und B.

Wie zu erwarten war, hatten die jüngsten Teilnehmerinnen und Teilnehmer auch die wenigsten Beispiele, allerdings überrascht es, dass die Kategorie B sogar die Kategorie A knapp übertraf. Allerdings darf man nicht unerwähnt lassen, dass es sich bei den befragten Schülerinnen und Schülern pro Kategorie um je acht handelt, also ist es schwierig, bei so geringer Anzahl von Befragten auf ein allgemein gültiges Resultat zu schließen, wenngleich sich gewisse Trends natürlich abzeichnen.

Grundsätzlich war zu erkennen, dass die Selbsteinschätzung relativ gut war. Bei der Aufgabe mit den Palindromen gab es die meisten Fehleinschätzungen in die positive Richtung, da die Schülerinnen und Schüler mit kleinen Denk- und Rechenfehlern sicher glaubten, dass ihre Berechnung stimmte. Aufgabe 6 war zwar ergebnismäßig die „beste“ Aufgabe, allerdings empfanden die Schülerinnen und Schüler sie durchschnittlich als etwas schwieriger als Aufgabe 2. Ein genereller Trend, dass die Befragten jene Aufgaben, die sie als weniger schwierig empfanden, besser lösen konnten, ist durchaus zu erkennen.

Interessant ist, dass jede Aufgabe der Aufgaben 2 bis 6 mindestens einmal bei der Frage nach jenen Aufgaben, die den Schülerinnen und Schülern besonders gefallen hätten, als auch mindestens einmal bei der Frage nach jener, die ihnen nicht gefallen hätte, vorkam.

Zur Lieblingsaufgabe der Gruppe α wurde demnach Aufgabe 6 gewählt, sieben Schülerinnen und Schüler nannten sie. Begründungen dafür war unter anderem, dass sie allgemein leicht zu beweisen ist und dass sie grundsätzlich einfach ist. Genau diese Trivialität gab eine befragte Person als Begründung dafür an, warum sie diese Aufgabe nicht mochte.

Mit sechs „Stimmen“ war Aufgabe 5 auch ziemlich beliebt. Hierbei gingen die Begründungen dafür in die Richtung, dass ein System erkennbar war, man solche Aufgaben selten sieht und sie deshalb interessant wären. Zwei der Befragten der Kategorie A mochten die Aufgabe besonders aufgrund der Zusatzfrage, da das Finden einer allgemeinen Formel sie reizte.

Aufgabe 3 mochten nur zwei Befragte nicht, beide, da sie nicht wussten, wie sie gelöst werden konnte. Im Gegenzug gaben fünf Schülerinnen und Schüler an, sie hätte ihnen besonders gefallen. Begründungen dafür waren unter anderem, dass sie einen eleganten Lösungsweg gefunden hätten, dass nicht gleich erkennbar gewesen wäre, wie man die Länge berechnen könnte und dass man mit einem Trick die Aufgabe lösen konnte.

Die größten Unstimmigkeiten gab es bei Aufgabe 4. Während vier Schülerinnen und Schüler diese Aufgabe besonders mochten, weil sie ein „Aha-Erlebnis“ hatten, dabei nachdenken mussten, ihnen herumprobieren Spaß machte oder sie bei dieser Aufgabe die Lösung noch nicht gefunden hatten und somit wohl noch über die Dauer der Befragung hinaus nach einer Möglichkeit suchen würden, gaben ebenso vier an, dass ihnen die Aufgabe nicht gefiel, teilweise ohne besondere Begründung, ansonsten deshalb, da sie herumprobieren als nicht spannend empfanden, lieber „rechnen als solche Geometrieaufgaben bearbeiten“ oder weil die Aufgabe auf den ersten Blick nach viel Arbeit aussah, was sich allerdings als nicht zutreffend erwies.

Aufgabe 2 bekam am wenigsten Erwähnung bei der Frage nach den (Nicht-)Lieblingsaufgaben. Drei Befragte mochten sie aufgrund der Einfachheit und des Themas der Winkel, eine befragte Person mag ebendiese Beschäftigung mit Winkeln nicht, weshalb sie oder er die Aufgabe auch nicht mochte.

8.1.9 Aufgabe 7 (mündlich)

Aufgrund der nach und nach gegebenen Hilfestellungen konnten alle Schülerinnen und Schüler diese Aufgabe lösen. Ohne jeglichen Hinweis schafften es vier der Befragten, weiteren sieben half ein kleiner Hinweis. Die restlichen 13 fanden die korrekte Antwort mit Hilfe des Tipps, dass sie doch überlegen sollten, was es bedeute, „10 Zahlen *dazwischen*" zu haben.

Einige gaben an, dass die Fragestellung sie beeinflusst habe, da zwar nach der Existenz eines Primzahlenpaares mit den beschriebenen Eigenschaften gefragt wurde, der Fragenzusatz mit dem „Falls ja" sie aber zuerst vermuten ließ, dass es ein solches Paar gäbe und sie es also zuerst zu finden versuchten. Sie hatten die Erfahrung gemacht, dass bei ähnlichen Fragestellungen die Antwort „ja" lautete, wenn danach ein „Falls ja" stünde.

Grundsätzlich fanden die meisten Schülerinnen und Schüler die Aufgabe eher einfach, allerdings gaben verhältnismäßig mehr Befragte an, die Aufgabe eher nicht so gut gelöst zu haben, einige ärgerten sich, dass sie auf die Fragestellung „hineingefallen" waren, nicht gut gelesen oder falsch gedacht hätten. Andere fühlten sich in der Situation in gewisser Weise unter Zeitdruck und würden beispielsweise bei Wettbewerben wie dem „Mathematical Duel" in der langen Zeit, die man für diesen oder ähnliche Wettbewerbe zur Verfügung hat, sich mehr Zeit nehmen, um Überlegungen anzustellen.

Deutlich zu erkennen war, dass das Probieren meistens der erste Versuch war. Viele der Befragten gingen die Primzahlen durch und erklärten auch, dass es zu ihrer grundsätzlichen Problemlösestrategie gehöre, durch Probieren auf ein Schema oder ein Gegenbeispiel zu kommen. Vor allem die jüngeren Befragten, die nicht sofort eine konkrete Idee hatten, gingen als erstes einige Primzahlen durch. Viele davon stellten sehr schnell fest, dass das Primzahlenpaar aus höheren Zahlen bestehen muss, da sie erkannten, dass die kleineren Primzahlen zu eng beieinanderliegen. Manche schlossen auch darauf, ohne es mit niedrigeren Zahlen ausprobiert zu haben.

Ein paar Schülerinnen und Schüler versuchten mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln eine Lösung zu finden.

Auffallend war, dass die Schülerinnen und Schüler grundsätzlich sehr gut mit den Primzahlen vertraut waren. Dies lässt sich natürlich dadurch erklären, dass diese im Mathematik-Olympiade-Kurs oftmals vorkommen und sie gewohnt sind, Aufgaben in diesem Zusammenhang zu lösen. So konnten die Befragten auf Anhieb die Primzahlen aufzählen, sowie mit Hilfe von Teilbarkeitsregeln ausschließen, welche Zahlen keine Primzahlen sein konnten.

Einige der Schülerinnen und Schüler versuchten die Aufgabe zu visualisieren und fertigten eine Skizze an. In einigen Fällen wurden dann Variablen oder Eigenschaften wie g für „gerade“ und u für „ungerade“ ergänzt, wie etwa in folgender Abbildung zu sehen ist.

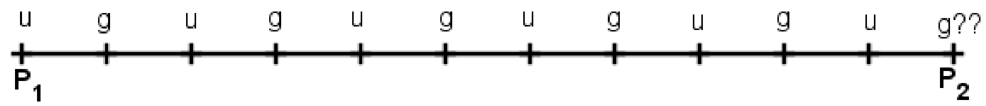


Abbildung 25: Visualisierung zu Aufgabe 7

8.1.10 **Aufgabe 8 (mündlich)**

Ein paar Schülerinnen und Schüler hatten das Spiel schon im Unterricht gespielt, doch für die meisten war es neu. Im ersten Durchgang schafften nur zehn Schülerinnen und Schüler, unter den 1000 zu bleiben, im zweiten waren es 14 und im dritten Durchgang schafften es sogar alle 24. Dies deutet daraufhin, dass sich die Strategie durchaus verbessert hatte. Der erzielte Durchschnittswert bei jenen Werten unter 1000 lag im ersten Durchgang bei etwa 903, im zweiten bei etwa 928 und im dritten bei 912. Dabei ist zu erwähnen, dass im dritten Durchgang die Summe der gewürfelten Zahlen 27 betrug, während die Summe im zweiten Durchgang sogar 33 betrug. Damit könnte zusammenhängen, dass der Durchschnitt der erreichten Summen im dritten Durchgang geringer als im zweiten ist.

Die Frage, ob solche Spiele Spaß bereiteten, bejahten die meisten. Für ein paar wenige, vor allem ältere Schülerinnen und Schüler, ist dabei nach ihrem Empfinden der Anteil des Glücks gegenüber der Strategie zu hoch – sie bevorzugen Aufgaben, die völlig glücksunabhängig sind. Es erschien zusammenfassend fast so, als ob die Jüngeren mehr Freude an solchen Spielen hätten und dass sie auch grundsätzlich risikofreudiger waren. Der Großteil der Befragten war außerdem der Meinung, dass man durchaus mit einer guten Strategie gute Ergebnisse erreichen könne, das Glück allerdings immer wieder „glückliche Gewinner“ hervorbringen würde.

Interessant war, dass elf Schülerinnen und Schüler die Aufgabe eher einfach, aber auch zehn eher schwierig fanden, somit also dieses Spiel zur schwierigsten Aufgabe der Befragung wählten. Zu bedenken ist aber, dass Aufgabe 1 ja nicht evaluiert wurde und die Situation beim schriftlichen Teil auch eine andere war, weswegen diese Aussage als „überspitzt“ aufgefasst werden kann. Allerdings ist durchaus erkennbar, dass die Schülerinnen und Schüler keineswegs trainiert und selbstsicher an solche Aufgaben herangehen.

Nummeriert man die Reihenfolge, in der die Befragten jeweils die Zahlen in die einzelnen Spalten eintrugen mit den Zahlen von 1 bis 9, so erhält man pro Durchgang drei Zahlen in jeder der drei Spalten. Von diesen jeweils drei Zahlen wurde der Durchschnitt berechnet. Dieser Durchschnitt der Reihenfolge beim Besetzen der einzelnen Spalten aller Schülerinnen und Schüler ist erwähnenswert: Während im ersten Durchgang in der ersten Spalte ein Durchschnitt von 4,39 auftrat, war es im zweiten 3,99 und im dritten 3,92. Das bedeutet, die Befragten versuchten zunehmend (vor allem zwischen dem ersten und zweiten Durchgang), die erste Spalte möglichst früh und „sicher“ zu befüllen. Dies ist auch daran erkennbar, dass im ersten Durchgang noch elf Mal die neunte und somit letzte Zahl in die erste Spalte gesetzt wurde, während es im zweiten und dritten Durchgang jeweils nur noch zwei Befragte diese in die erste Spalte setzten. Im zweiten Durchgang behielten zwölf Schülerinnen und Schüler das letzte Feld in der dritten Spalte frei, im dritten Durchgang waren es sogar 14.

Umgekehrt verhält es sich beim Reihenfolgen-Durchschnitt in der dritten Spalte. Waren es im ersten Durchgang noch 5,51, wurden es im zweiten Durchgang 5,82 und im dritten 5,90.

Selbstverständlich können in diesem Fall die Analysen auch dadurch verfälscht sein, dass in jedem Durchgang andere Zahlen und Reihenfolgen vorgekommen sind. Da jedoch die von den Schülerinnen und Schülern in der Befragung angegebenen geplanten Strategien den Durchschnitts-Ergebnissen in der Weise entsprechen, dass sie versuchten, die erste Spalte so zu belegen, dass die Summe der Zahlen in der ersten Spalte (je nach Strategie) acht oder neun beträgt und dass es sicherer ist, die letzte Zahl in die letzte Spalte setzen zu können, da man bei dieser nicht mehr zwischen mehreren Positionen wählen kann und in den ersten beiden Spalten die Schwankung erheblich größer wäre.

8.2 Gruppe β

Die Schülerinnen und Schüler der Gruppe β wurden am Montag, den 20. März 2017 schriftlich sowie an den zwei darauffolgenden Tagen mündlich im BRG Kepler befragt. Die Schülerinnen und Schülern wurden darum gebeten, vor allem ihre Lösungsideen zu beschreiben, falls sie beispielsweise die Aufgabe aus Zeitgründen nicht vollständig lösen konnten. Dieser Bitte wurde großteils Folge geleistet, daher sind im Folgenden unter anderem auch theoretisch beschriebene Lösungsansätze dargestellt.

Die Gruppe β umfasst 27 Schülerinnen und Schüler, die den schriftlichen Teil absolvierten. Ein weiterer Schüler wurde aus der Wertung gestrichen, da er einen Mathematik-Olympiade-Kurs besucht und in dieser Gruppe das Problemlöseverhalten von jenen Schülerinnen und Schülern untersucht werden soll, die keinen zusätzlichen Kurs besuchen. Selbstverständlich war es ihm dennoch erlaubt, bei der Befragung aus Interesse teilzunehmen. An den Tagen der mündlichen Befragung fehlten zwei Schülerinnen und Schüler, weshalb nur 25 mündlich befragt wurden. Da in jeder der Alterskategorien (im Folgenden weiterhin wie bei Gruppe α mit den Kategorien A für die 7. und 8. Klasse, B für die 5. und 6. sowie C für die 3. und 4. Klasse) jedoch mindestens acht Befragte waren, wurde darauf verzichtet, die zwei an einem Extra-Termin noch einmal zu befragen. Auch wurden sie nicht komplett aus der Statistik genommen, da es schließlich bei dieser Diplomarbeit um keinen Wettbewerb zwischen den Gruppen handelt, sondern um die Erforschung von Lösungsansätzen und Strategien. Dafür ist es durchaus interessant, weitere Möglichkeiten und Ideen festzuhalten.

In diesem Kapitel werden die Antworten, Lösungshäufigkeiten und Strategien der Gruppe β analysiert, zuerst der schriftliche, danach der mündliche Teil.

8.2.1 Persönlicher Fragebogen

Die ersten drei Fragen, die bei Gruppe α den Mathematik-Olympiade-Kurs betrafen, wurden im Fragebogen der Gruppe β durch andere Fragen ersetzt, die restlichen Fragen waren dieselben.

Elf Schülerinnen und Schüler besuchen keinen Mathematik-Olympiade-Kurs, weil sie kein Interesse oder keine Lust dazu haben, vier geben reine Zeitgründe dafür an und neun kreuzten eine Mischung aus diesen beiden Antworten an. Drei entschieden sich für die Antwort „andere Gründe“, wobei diese nicht weiter erklärt wurden. Zusammenfassend kann also gesagt werden, dass es sich bei der Gruppe β zwar durchaus um gute und interessierte Schülerinnen und Schüler handelt (siehe folgende Absätze), allerdings mit wenig Interesse und Zeit, Mathematik freiwillig noch intensiver zu betreiben.

Zwar stimmen fünf Befragte sehr und sogar 14 eher zu, dass sie an Mathematik grundsätzlich interessiert wären, allerdings beschäftigen sich 16 Schülerinnen und Schüler nur selten in ihrer Freizeit mit Mathematik, drei oft, zwei sehr oft und sechs nie.

Ein nicht extra angeführter Grund, den Mathematik-Olympiade-Kurs nicht zu besuchen, wäre die Angst vor mathematischen Wettbewerben. Der Aussage, der Gedanke an mathematische Wettbewerbe bereite ihnen Unbehagen, stimmten sieben Schülerinnen und Schüler eher zu, eine befragte Person sogar sehr. 13 kreuzten „eher nicht" an, nur sechs scheinen gar kein Unbehagen zu verspüren. Dafür gaben 18 Befragte an, vor Mathematik-Wettbewerben gar nicht nervös zu sein – ob deshalb, weil es für sie unwichtig erscheint oder weil sie andere Gründe dafür haben, wurde nicht gefragt. Es gibt jedoch immerhin zwölf Befragte, die eher oder sehr zustimmten, dass sie gerne öfter an mathematischen Wettbewerben teilnehmen würden, wohingegen von den 15 anderen sogar acht dieser Aussage gar nicht zustimmten.

Die Nervosität vor Schularbeiten scheint in dieser Gruppe deutlich höher als vor Wettbewerben zu sein: jeweils neun Schülerinnen und Schüler kreuzten „sehr" oder „eher" an, vier sind eher nicht nervös und nur fünf gar nicht.

Dabei zählen sich fünf sehr und 13 eher zu den begabten und interessierten Schülerinnen und Schülern ihrer Klasse und für die Hälfte der Befragten zählt Mathematik zumindest eher oder gar sehr zu ihren Lieblingsfächern in der Schule. Nur ein Mal wurde „sehr oft" und sechs Mal „oft" bei der Frage nach der Häufigkeit der Unterforderung im Mathematikunterricht angekreuzt, die Mehrheit von 16 Schülerinnen und Schülern fühlt sich nur selten unterfordert. Elf Befragte stimmten eher zu, dass im Unterricht begabte und interessierte Schülerinnen und Schüler gefördert werden, ebenso viele stimmten eher zu, dass diese mehr gefördert werden sollten. Beinahe gleich viele kreuzten bei diesen beiden Aussagen jeweils „stimme eher nicht zu" an.

Da die Schülerinnen und Schüler der Gruppe β von ihren Lehrerinnen und Lehrern vorgeschlagen beziehungsweise gefragt worden waren, ob sie an dieser Befragung teilnehmen wollten, ist es nicht überraschend, dass fünf sehr gerne und 15 eher gerne Knobelaufgaben lösen, da ihnen im Vorhinein auch gesagt wurde, dass es sich um solche handeln würde. Zwei mögen solche Aufgaben zwar gar nicht und fünf eher nicht, allerdings haben auch sie sich für diese Befragung gemeldet und insofern Interesse gezeigt.

8.2.2 **Aufgabe 1**

Leider konnte niemand in der Gruppe β diese Aufgabe korrekt lösen. Auch auf den Trick, die 12,5 als $\frac{100}{8}$ zu schreiben, kamen die Befragten nicht. Dies dürfte den Grund haben, dass die Befragten der Gruppe β viel seltener mit solchen Umwandlungen und Zahlenspielereien in Kontakt kommen als jene aus Gruppe α.

Erstaunlich war aber, dass einige Schülerinnen und Schüler durchaus Ideen angaben, wie sie das Ergebnis berechnen würden, ohne dezidiert die beiden Zahlen „normal" miteinander zu multiplizieren. Dabei war die häufigste Methode jene, die Zahl Z mit 10 zu multiplizieren, indem man eine Null anhängt, und schließlich mit $2{,}5 \cdot Z$ zu addieren (beziehungsweise wurden in einem Fall explizit zuerst nur 2Z und danach noch 0,5Z addiert). Ein paar Schülerinnen und Schüler sahen sogar in diesem Fall, dass 2,5 ein Viertel der verzehnfachten Zahl Z ist und begannen daher, einfach durch 4 zu dividieren.

Eine befragte Person begann, die Zahl Z mit 13 zu multiplizieren. Ob dies als ungefähre Abschätzung oder als Beginn der Möglichkeit 13Z – 0,5Z gedacht war, ist unklar.

Ein Versuch war, die Zahl Z ziffernweise mit 12,5 zu multiplizieren, wobei die Schülerin oder der Schüler jedoch links begann ($8 \cdot 12{,}5;\ 1 \cdot 12{,}5;\ 6 \cdot 12{,}5$ ...) und dabei schon früh Fehler machte, da die Ziffern der Teilergebnisse durch deren direktes Aneinanderreihen an der falschen Stelle standen. Trotzdem muss dieser Versuch hier lobend erwähnt werden, da er mit ein paar kleinen Anpassungen durchaus Potential hätte, die Aufgabe schnell zu lösen.

8.2.3 **Aufgabe 2**

Diese Aufgabe konnten überraschenderweise nur fünf Schülerinnen und Schüler komplett lösen, davon waren drei in der Alterskategorie A und jeweils eine oder einer in den Kategorien B und C. Während vier wie „üblich" argumentierten, argumentierte eine befragte Person wie folgt:

Der Winkel BAC wurde mit Hilfe der Winkelsumme im Dreieck berechnet. Dann wurde offenbar erkannt, dass die Winkelhalbierende in einem gleichschenkeligen Dreieck normal auf die Basis steht. Dies wurde im unteren Dreieck wieder angewandt und der Winkel δ konnte durch die Gleichung $180 - 90 - \frac{50}{2} = \delta$ berechnet werden. Offenbar war der Schülerin oder dem Schüler der Basiswinkelsatz, der besagt, dass in einem gleichschenkeligen Dreieck die beiden Basiswinkel gleich groß sind, nicht geläufig und so versuchte sie oder er diese Eigenschaft selbst herzuleiten. Dieses Vorgehen entspricht gutem Problemlösen und daher findet es an dieser Stelle besondere Erwähnung.

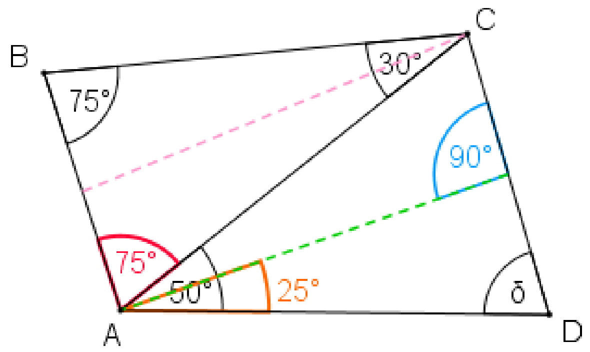


Abbildung 26: gefundener Lösungsweg zu Aufgabe 2

Zwar konnten nur fünf das Beispiel komplett lösen, aber bemerkenswert bei dieser Aufgabe ist, dass alle 27 Schülerinnen und Schüler sie bearbeitetet hatten und zumindest eine Idee oder einen Zwischenschritt zur Lösung fanden. Die meisten konnten herausfinden, dass der Winkel BAC 75° hat. Einige von ihnen schrieben dann sogar dazu, dass es sich beim Dreieck ABC also um ein gleichschenkeliges handeln muss, erkannten dann aber nicht, dass in logischer Konsequenz das Dreieck ACD auch ein solches sein muss.

Einige der Befragten versuchten, den Winkel δ über die Winkelsumme im Viereck zu berechnen. Ein paar Schülerinnen und Schüler erhielten sogar ein Ergebnis, welches aber durch falsches Schließen zustande kam, beispielsweise dadurch, dass sie (aufgrund der Angabe, dass die beiden Seiten AD und BC gleich lang sind) annahmen, das Viereck ABCD wäre ein Parallelogramm.

Ein beschriebener Lösungsweg, der ohne Taschenrechner nicht durchführbar erschien, war, die Winkel mit Hilfe des Sinussatzes zu berechnen.

Eine befragte Person aus der Alterskategorie A gab an, das Beispiel nicht lösen zu können, da ihr die Erinnerung an den Unterstufenstoff fehle und sie nicht wisse, wie sie die Information $AD = BC$ einsetzen solle, um auf das Ergebnis zu kommen.

Nur zwei Befragte fanden diese Aufgabe sehr einfach, acht eher einfach, neun eher und sechs sehr schwierig. Zwei gaben an, sie hätten für die Aufgabe zu wenig Zeit gehabt oder sie nicht gut genug verstanden.

8.2.4 Aufgabe 3

Diese Aufgabe konnten acht Schülerinnen und Schüler vollständig lösen. Zwei weitere waren ganz knapp dran: Sie haben die Seite mit der Länge 5 zur Gesamtlänge dazugezählt oder das Ergebnis nicht gänzlich ausgerechnet – bis zu diesem Schritt wurde jedoch alles richtig gemacht. Zudem gab es noch ein paar Befragte, die eigentlich einen korrekten Lösungsweg angaben, sich aber verrechneten oder einen kleinen Denkfehler hatten, wie etwa jene befragte Person, die anstelle von 11 im Nenner 12 schrieb, das Dreieck also in zwölf Streifen schnitt.

Sechs Befragte versuchten, das Ergebnis durch Zeichnen des Parallelogramms zu bekommen, was vieren davon auch gelang. Ebenso sechs versuchten, die Länge zu berechnen, dies gelang dreien. Neun hatten andere Ideen, darunter jene, bei denen die kürzeren Linien sich mit den längeren direkt auf jeweils die Länge 5 ergänzen. Ebenso wurde wieder – wie schon einmal in Gruppe α – das „halbe Parallelogramm“, also eines mit der halben Höhe, eingezeichnet.

Eine befragte Person versuchte das Beispiel zu lösen, indem sie das Dreieck in ein Koordinatensystem transferierte und drehte, sodass die längste Seite auf einer Geraden f liegt (siehe Abbildung 27).

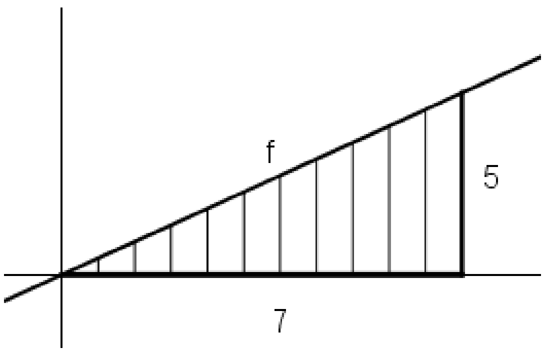


Abbildung 27: Idee zu Aufgabe 3

Damit sollte die Länge wie folgt berechnet werden:

$$Gesamtlänge = f(1) + f(2) + \cdots + f(10) = \frac{5}{7} + 2 \cdot \frac{5}{7} + \cdots + 10 \cdot \frac{5}{7} = 55 \cdot \frac{5}{7}$$

Dieser Lösungsweg funktioniert jedoch nur, wenn das Dreieck rechtwinkelig ist, was bei dieser Aufgabe nicht der Fall ist, daher ist das Ergebnis auch nicht korrekt, da die Länge einer der eingezeichneten Linie nicht genau dem Funktionswert entspricht. Außerdem stimmen auch die Argumente in der Berechnung nicht, es müsste $f\left(\frac{7}{10}\right) + f\left(2 \cdot \frac{7}{10}\right) + \cdots + f(7)$ sein.

Eine weitere Problemlösestrategie einer Befragten oder eines Befragten war, das Dreieck zu konstruieren. Anschließend konnte sie oder er die Längen der Linien berechnen, eventuell auch deshalb, weil durch das Konstruieren ein ungefähres Messen möglich ist, was zum Finden der richtigen Berechnung beitragen kann.

Eine Schülerin oder ein Schüler wusste offenbar, dass bei ähnlichen Dreiecken die Verhältnisse der Seitenlängen stets gleich sind, was dem Strahlensatz entspricht. So wurden die Längen der einzelnen Linien wie folgt berechnet: $11{:}\,5 = 1{:}\,x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{11}$ und $11{:}\,5 = 2{:}\,x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{5{,}5}$. Möglicherweise war es die Kommadarstellung im Nenner, die die befragte Person nicht erkennen ließ, nach welchem Schema die Längen der einzelnen Linien aufgebaut sind, jedenfalls kam sie nicht auf die Gesamtlänge als einfache Addition. Doch auch dieser Ansatz soll hier erwähnt sein, da durch die aufgeschriebenen Rechenschritte erkennbar war, dass dieser Ansatz wirklich im Moment der Bearbeitung überlegt und hergeleitet worden war und somit „echtem Problemlösen“ entspricht.

Ein paar Schülerinnen und Schüler gaben nur eine theoretische Idee an, wie sie die Aufgabe zu lösen versuchen würden. Eine theoretische Beschreibung einer Lösungsidee war, die einzelnen Längen der Linien mit Hilfe des Sinussatzes zu berechnen.

Eine Schülerin oder ein Schüler kam ebenso der Bitte nach, eine Beschreibung der ungefähren Idee anzugeben, falls er oder sie aus Zeit- oder sonstigen Gründen nicht die gesamte Aufgabe lösen konnte. Sie oder er gab an, die Aufgabe nicht lösen zu können, da sie oder er nicht wusste, wie; jedoch wurde folgende Idee angegeben: „Ich hätte von 5 etwas abgezogen und dann immer weiter.“ Dies ist ein grundlegender Gedanke: In diesem Fall wird von 5 etwas subtrahiert, andere Lösungsverfahren beruhen darauf, die einzelnen Linien zu addieren.

So ähnlich dachte auch eine befragte Person, die ein Parallelogramm einzeichnete. Doch anstatt zu erkennen, dass die gesuchte Länge genau die Hälfte der Gesamtlänge ist, berechnete sie die Länge der „überstehenden“ Linien und zog diese von der Gesamtlänge der Linien im Parallelogramm ab: $10 \cdot 5 - 55 \cdot \frac{5}{11} = 50 - \frac{275}{11} = 25$.

Diese Aufgabe fanden fünf Befragte sehr einfach, sieben eher einfach, fünf eher schwierig und zwei sehr schwierig. Was die Selbsteinschätzung betrifft, so ist zu erkennen, dass sich zwar einige Schülerinnen und Schüler richtig einschätzten, was das „sicher richtig“ betrifft, andere allerdings durchaus falsch lagen beziehungsweise sich mit ihrem korrekten Ergebnis unsicher fühlten.

8.2.5 Aufgabe 4

Diese Aufgabe wurde von vier Schülerinnen und Schülern korrekt gelöst, zwei davon beantworteten auch die Zusatzfrage. Drei der vier sind Schülerinnen und Schüler der Kategorie A.

Zwei Befragte hatten die Idee, an zwei Quadratseiten eine Reihe von kleinen Quadraten einzufügen, davon führte eine oder einer diese Idee zu Ende und erhielt eine in Kapitel 7.2.4 bereits vorgestellte Möglichkeit.

Eine Schülerin oder ein Schüler fand jene Möglichkeit mit den 28 um den Rand herum angeordneten Quadraten und kam darauf, indem sie oder er die Idee hatte, vier Quadrate in die Ecken zu positionieren und berechnete dann folgendes: $\frac{25}{4} = 6 + \frac{1}{4}$. Daraus konnte gefolgert werden, dass zwischen die Quadrate in den Ecken jeweils sechs gleich große Quadrate an jede Seite gesetzt werden müssen und man somit 29 erhält, „da sich in der Mitte ein großes gebildet hat“. Dabei wurde zwar keine Zeichnung angefertigt, aber verbal so genau argumentiert, dass die Lösung als korrekt gewertet wurde – schließlich ist in der Angabe keine Zeichnung gefordert, sondern lediglich das Angeben einer Methode.

Eine Schülerin oder ein Schüler fand eine Methode, die in Gruppe α nicht gefunden wurde. Den Versuchen zufolge muss sie oder er versucht haben, durch Hinzufügen von Quadraten auf ein großes Quadrat zu kommen und kam so durch geschicktes Probieren auf die Zerteilung in Abbildung 28.

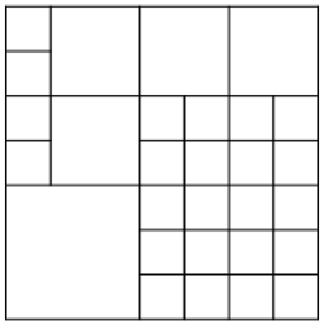


Abbildung 28: gefundene Möglichkeit zu Aufgabe 4

Der häufigste Denkfehler passierte vor allem den jüngeren Befragungsteilnehmerinnen und -teilnehmern: Dabei wurde die Fläche des Quadrats durch 29 geteilt und als Antwort angegeben, dass dies nun die Fläche eines der Quadrate sein muss. Andere gaben an, dass man die Seitenlänge in $\sqrt{29}$ gleich breite Abschnitte unterteilen soll und dadurch eine Unterteilung in 29 Quadrate erhält. Dabei wurde nicht bedacht, dass die Wurzel aus 29 irrational ist und diese Ansätze somit zu keiner Lösung führen. Diese Lösungsvorschläge zeigen einerseits, dass die Schülerinnen und Schüler mit solchen Aufgaben und mit Quadratzahlen nicht so sehr vertraut sind, andererseits aber auch, dass sie großteils nicht erkennen, dass diese Zerteilung nicht existiert, da sie keine Zeichnung anfertigten. Dabei darf nicht verallgemeinert werden, es gab nämlich durchaus Befragte, die die oben beschriebene Idee zwar angaben, aber auch bemerkten, dass sie sich in der Umsetzung als falsch herausstellte.

Die wohl kreativste Antwort gab eine befragte Person, die beim Suchen nach einer korrekten Lösung den durchgestrichenen Versuchen zufolge fast verzweifelte und schrieb: „Man schneidet einfach 29 gleich große, kleine Quadrate heraus und wirft den Rest weg. Dies wird in der Angabe nicht explizit verboten.“ Sucht man nach der Bedeutung des Wortes „zerteilen“, so findet man im Duden (online) Synonyme wie „in seine Bestandteile zerfallen“, „fragmentieren“ oder „aufsplitten“. Im Grunde ist die beschriebene Idee falsch, die Wortbedeutungen deuten darauf hin, dass das Zerteilen einem „Teilen ohne Rest“ gleichzusetzen ist. Allerdings sollten solche Antworten durchaus als erwähnenswert gesehen werden, da sie zeigen, dass die oder der Bearbeitende sich Gedanken über die Formulierung der Aufgabe gemacht hat.

Eine weitere „falsche“, aber durchaus kreative Möglichkeit wurde gefunden, indem die letzten fehlenden Quadrate extra in andere Quadrate eingefügt wurden, wobei dann folgende Aufteilung als zwei Quadrate gezählt wurde:

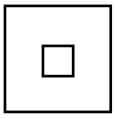


Abbildung 29: Versuch, ein Quadrat in zwei Quadrate zu zerteilen

Eine befragte Person verwechselte offenbar Quadratzahlen mit den sich verdoppelnden Zahlen und schrieb die Folge „4, 8, 16, 32“ auf und danach folgende Idee: „Ich falte Papier in der Hälfte bis ich 32 Quadrate habe und fasse dann 4 kleine Quadrate zu einem zusammen.“ Auch in diesem Fall hätte das heuristische Hilfsmittel einer Skizze geholfen, um möglicherweise zu erkennen, dass dies nicht so wie beschrieben möglich ist. Dennoch muss an dieser Stelle auch erwähnt werden, dass die Schülerin oder der Schüler erkannt hatte, dass sich beim Zusammenfassen von vier Quadraten die Gesamtquadratzahl um drei verringert.

Probleme gab es auch damit, dass nicht immer Quadrate, sondern auch Rechtecke gezeichnet wurden, um auf 29 zu kommen. Eine Schülerin oder ein Schüler dachte, ein Quadrat könne jeweils nur in vier kleinere Quadrate zerteilt werden, und argumentierte, dass es auf diese Weise nicht möglich sei, dass 29 Quadrate entstehen.

Bei folgender Variante fand die befragte Person zwar eine Möglichkeit mit 29 Quadraten, allerdings ist die Ursprungsform kein Quadrat, sondern ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis von 6:7 (siehe Abbildung 30). Wäre die Ursprungsform tatsächlich ein Quadrat, wären die eingezeichneten Vierecke zumindest teilweise Rechtecke.

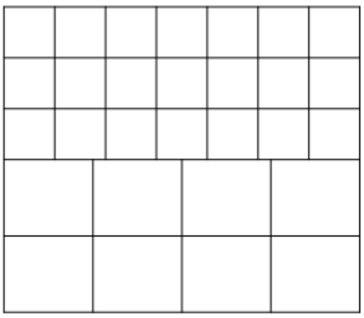


Abbildung 30: Versuch einer Zerteilung zu Aufgabe 4

Ein paar Schülerinnen und Schüler gaben an, dass sie weiter probiert hätten, wenn ihnen mehr Zeit zur Verfügung gestanden wäre.

Die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler fanden diese Aufgabe eher oder sehr schwierig, bei der Selbsteinschätzung war es erneut so, dass die meisten sich richtig einschätzten. Allerdings glaubten vereinzelte Schülerinnen und Schüler, ihr Lösungsweg wäre korrekt, obwohl sich ein Denkfehler eingeschlichen hatte.

8.2.6 **Aufgabe 5**

Die Palindrom-Aufgabe haben zwar nur zwei Schülerinnen und Schüler der Gruppe β korrekt gelöst, drei weitere waren sehr nah an der richtigen Lösung, dennoch haben beinahe alle die Aufgabe bearbeitet und verschiedene Strategien dabei verwendet.

Ein Denkfehler, der passierte, ist jener, dass nur diejenigen Palindrome gezählt wurden, welche aus lauter gleichen Ziffern bestehen. Ein paar andere vergaßen auf andere Möglichkeiten, dachten zwar richtig, zählten aber beispielsweise nicht alle zehn Möglichkeiten für eine Ziffernstelle und erhielten daher ein falsches Endergebnis. In diesem Fall hätte die Strategie des Probierens möglicherweise geholfen, zum Beispiel einige Palindrome aufzuschreiben, um möglicherweise auch besser abschätzen zu können, um welche Größenordnung es sich handeln muss. Die Ergebnisspannweite war nämlich ziemlich groß, von zweistelligen bis zu vierstelligen Ergebnissen war einiges dabei. Auch beim Probieren ist man nicht vor Zähl- oder Rechenfehlern gefeit, so passierte es auch in dieser Gruppe, dass der erste Tausender „doppelt" berechnet wurde, die Null an einer der inneren Ziffernstellen nicht mitgezählt wurde oder ähnliches.

Ein weiterer Fehler war, dass die Aussage „kleiner als 10000" mit „maximal fünfstelliger Zahl" identifiziert wurde – jedoch sind es maximal vierstellige Zahlen.

Möglichkeiten zur systematischen Herangehensweise gab es auch in dieser Gruppe verschiedene: Es gab erneut Platzhalter-Unterstriche, unter die die Möglichkeiten der Ziffern geschrieben wurden. Eine andere gefundene Methode war, zuerst die Zahlen unter 100 zu untersuchen, danach jene von 101 bis 200, durch diese Anzahl auf die Anzahl der Palindrome von 201 bis 1000 zu schließen und auf dieselbe Art alle zwischen 1001 und 10000 zu finden.

Es passierte auch, dass zu früh ein vermeintliches System erkannt wurde, beispielsweise dass die Anzahl der Palindrome, die kleiner als 100 sind, zwar richtig berechnet wurde, jedoch anschließend diese Anzahl für alle weiteren Zahlen aufsummiert wurde. Beispielsweise wurde die Anzahl der Palindrome bis 1000 mit $9+9+9^2$ berechnet (auch in diesem Fall wurde die Null in der Mitte vergessen) und daraus geschlossen wurde, dass die Anzahl jener zwischen 1000 und 10000 9^3 sein müsse.

Ein paar wenige Schülerinnen und Schüler dürften die Aufgabenstellung nicht richtig verstanden haben. Die Antworten ließen darauf schließen, dass nicht zur Gänze verinnerlicht gewesen sein kann, wie Palindrome aussehen und welche Zahlen das beispielsweise sein könnten.

Bei dieser Aufgabe dürfte vielen die Zeit zur Vollendung ihrer Idee gefehlt haben. So haben einige begonnen, eine Matrix oder ein anderes System aufzuschreiben, und haben dann abgebrochen und teilweise auch angemerkt, dass die Zeit zu knapp gewesen sei.

Je zwei Befragte fanden die Aufgabe sehr einfach beziehungsweise sehr schwierig, für je acht war sie eher einfach oder eher schwierig, folglich eine Aufgabe, deren Schwierigkeitsgrad in dieser Gruppe im Durchschnitt der Mitte entspricht. Interessant ist, dass zwischen den Altersstufen kaum Unterschiede erkennbar sind, wie schwierig die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe finden. Erklärbar ist diese Tatsache dadurch, dass man für die Lösung der Aufgabe kaum mathematische Fertigkeiten braucht, sondern sie sogar auch durch logisches Denken und Abzählen lösen kann. Eine Tendenz zu Unterschieden zwischen den Altersgruppen gab es bei dieser Aufgabe nur im Bearbeitungsstil: je älter die Schülerinnen und Schüler waren, desto häufiger versuchten sie, durch Systematik ein Ergebnis zu erhalten, während die jüngeren häufiger durch Probieren, Aufschreiben und Zählen dem Ergebnis näherkommen wollten.

Die Zusatzfrage konnte von einer befragten Person der Kategorie A beantwortet werden, wenngleich die Summenschreibweise mathematisch nicht korrekt war. Allerdings war die Überlegung richtig und das Ergebnis auf zwei Arten angeschrieben, wobei eine davon als korrekt gewertet werden kann. Vier weitere Befragte haben versucht, eine allgemeine Formel anzugeben.

8.2.7 Aufgabe 6

Diese Aufgabe war mit 15 korrekten Lösungen und zehn richtigen Antworten auf die Zusatzfrage die von der Gruppe β eindeutig am besten gelöste Aufgabe. Zwar waren es bei der Zusatzfrage durchaus die Älteren, die sie häufiger beantworten konnten, allerdings hatten bei der Basisaufgabe auch fünf der jüngsten Befragten das richtige Ergebnis.

Bei der Beurteilung der Schwierigkeit der Aufgabe fällt auf, dass niemand von jenen, die die Aufgabe bearbeitet hatten, sie für sehr schwierig hielt. Fünf empfanden sie als eher schwierig, neun als eher einfach und fünf als sehr einfach. Drei Schülerinnen und Schüler konnten die Aufgabe aufgrund von Zeitmangel nicht bearbeiten, die anderen gaben zusätzlich noch „verstehe die Aufgabe nicht" als Grund für das Nicht-Bearbeiten an. In der Selbsteinschätzung sind mit einer Ausnahme alle im Rahmen einer zutreffenden Einschätzung.

Alle sechs Schülerinnen und Schüler, die durch Argumentation und Einzeichnen diverser Formen in die Zeichnung die Aufgabe bearbeiteten, fanden das richtige Ergebnis. Einige Möglichkeiten seien hier beispielhaft erwähnt:

- Eine befragte Person vervollständigte die Dreiecke A und B zu Rauten (vergleiche Kapitel 7.2.6) und argumentierte somit ähnlich wie Hemme (2003, S. 82). Dabei zeichnete sie oder er in die entstandenen Rauten die fehlende Diagonale und erkannte, dass in die Raute mit der Fläche 2B (in der folgenden Abbildung grün gefärbt) das Dreieck A zwei Mal hineinpasst und umgekehrt. Dadurch handelt es sich bei den Flächen A und B jeweils um die Hälfte der Fläche der Raute, somit sind die beiden gleich groß.

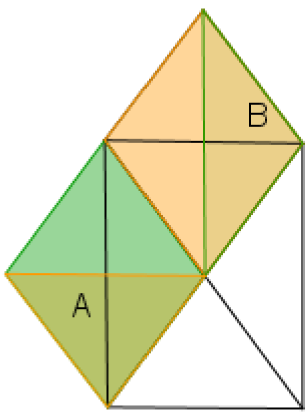


Abbildung 31: gefundene Lösung zu Aufgabe 6

- Die eine Diagonale des Rechtecks teilt es in zwei gleich große, rechtwinkelige Dreiecke. Durch die zweite Diagonale wird eines dieser Dreiecke dann in die Dreiecke A und B geteilt, und da diese Teilung im Mittelpunkt des Blattes erfolgt, sind die Flächen von A und B gleich groß. Diese Argumentation kam auch bereits in den Antworten der Gruppe α vor und beruht darauf, dass die Schwerlinie ein Dreieck in zwei flächengleiche Dreiecke teilt.
- Die Hälften der Dreiecke A und B sind gleich große Dreiecke (siehe Abbildung 32) und ergeben zusammen ein Rechteck, also ist die Fläche dieses Rechtecks gleich den Flächen von A und B, folglich sind die beiden gleich groß. Andere Befragte verwendeten genau diese Idee und argumentierten, dass man die beiden Dreiecke durch Teilung zum jeweils anderen Dreieck „umbauen“ kann beziehungsweise weil sie „gefaltet aufeinander passen“.

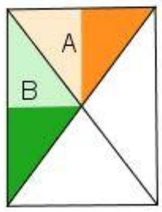


Abbildung 32: Überlegung zu Aufgabe 6

Elf Befragte versuchten durch das Berechnen der Flächen auf das Verhältnis zu kommen, davon rechneten die meisten mit den konkreten Zahlen, während andere die Aufgabe dadurch lösten, indem sie die Zusatzfrage korrekt allgemein beantworteten. Eine Schülerin oder ein Schüler versuchte die Flächen mit Hilfe des Satzes von Pythagoras zu lösen, eine an und für sich mögliche Variante, allerdings kam sie oder er in diesem Fall aufgrund von anderen Fehlern nicht auf das korrekte Verhältnis.

8.2.8 Anzahl der richtigen Lösungen im schriftlichen Teil (Aufgaben 1-6), Selbsteinschätzung und Lieblingsaufgaben

Im Durchschnitt lösten die Befragten in der Gruppe β 1,4 Beispiele komplett richtig. Die Kategorie A hatte mit 2,3 deutlich mehr Erfolg als B mit 1,2 und C mit 0,8. Wie bereits in den vergangenen Kapiteln erwähnt, scheiterten viele Schülerinnen und Schüler an „Kleinigkeiten“, daher kommen die meisten trotz einer Fülle an Ideen auf wenige komplett richtige Ergebnisse.

Ein weiterer Grund war sicherlich der Zeitfaktor. Für Schülerinnen und Schüler mit wenig Übung in Knobelaufgaben wäre mehr Zeit notwendig gewesen, und mit Sicherheit hätte dann diese Statistik noch „besser“ ausgeschaut. Allerdings geht es in dieser Diplomarbeit wie schon mehrfach erwähnt nicht um die Anzahl der korrekten Antworten, sondern um die Lösungswege und Strategien, mit denen Schülerinnen und Schüler solche Aufgaben bearbeiten. Manche Befragte kamen der Bitte, ihre Ideen in dem Fall, dass sie eine Aufgabe nicht vollständig lösen können, zu beschreiben, mit großer Sorgfalt nach und so konnten einige weitere Ansätze in die Analyse miteinbezogen werden.

Die Selbsteinschätzung wurde bereits mehrfach in den vorangehenden Kapiteln erwähnt. Die meisten konnten sich gut einschätzen, allerdings fällt durchaus auf, dass einige Schülerinnen und Schüler oftmals dachten, sie hätten die Aufgabe besser gelöst als sie es tatsächlich hatten.

Auf die Frage nach den Lieblingsaufgaben wurde in der Gruppe β jede Aufgabe mindestens drei Mal erwähnt. Aufgabe 2 ist mit diesen drei Stimmen das Schlusslicht, während Aufgabe 6 neun Mal erwähnt wurde, die Aufgaben 3 und 5 folgen mit jeweils fünf Erwähnungen und Aufgabe 4 erhielt vier.

Die Argumente, warum die Aufgaben zu ihren Lieblingsaufgaben zählen, waren beispielsweise solche, dass die Aufgabe „logisch“, „einfach“ oder „lustig“ beziehungsweise „spannend“ war. Seltener wurden Begründungen wie „erfordert kreative Vorgehensweise“ oder „kein stumpfes Rechnen“ angegeben. Es ist erkennbar, dass diese Gruppe weniger die Herausforderung, sondern die Freude am Knobeln schätzt.

Auch auf die Frage, welche Aufgabe ihnen nicht gut gefallen hätte, antworteten die Schülerinnen und Schüler unterschiedlich und nannten in Summe alle Aufgaben. Die überwiegende Mehrheit der Gründe dafür war, dass sie keine Lösung gefunden hatten oder nicht wussten, wie man die Aufgabe lösen könnte. Die unbeliebtesten waren die Aufgaben 3 und 4 mit jeweils vier Stimmen, gefolgt von 5 und 6 mit jeweils drei und 2 mit zwei.

8.2.9 Aufgabe 7 (mündlich)

Alle Schülerinnen und Schüler hatten bereits in der Schule etwas über Primzahlen gehört und kannten zumindest ihre wichtigsten Eigenschaften. Viele hatten die Primzahlen bis 100 nicht im Kopf, konnten sie aber durch Überlegen aufschreiben. Eine befragte Person konnte ohne jegliche Hilfe die Aufgabe auf Anhieb lösen, indem sie gleich eine Skizze machte und in diese alle gegebenen Informationen aus der Angabe einzeichnete. Dabei wurde erkannt, dass es kein solches Primzahlenpaar geben kann, da sich gerade und ungerade Zahlen immer abwechseln und somit die elfte Zahl eine gerade sein muss, wenn die erste ungerade ist. Auch das Paar 2 und 13 erkannte sie oder er als einziges Primzahlenpaar, bei dem genau zehn andere ganze Zahlen dazwischenliegen, und konnte begründen, warum sich auch dieses nicht als Antwort eignete.

Eine weitere befragte Person brauchte nur einen kleinen Hinweis – sie oder er hatte die Idee, den Ausdruck „10 Zahlen dazwischen“ als Differenz auszudrücken. Nach einem kleinen Hinweis, dass sie oder er diese Idee weiter verfolgen soll, wurde das Beispiel eigenständig gelöst.

Etwa neun Befragte brauchten den Hinweis, dass sie überlegen sollten, was denn „10 Zahlen dazwischen“ bedeute. Mit dieser Hilfe fanden sie die richtige Antwort. Etwa die Hälfte der befragten Schülerinnen und Schüler brauchten darüber hinaus noch weitere Hilfestellungen, darunter beispielsweise auch die Aufforderung, sie sollten das Problem mit einigen Beispielzahlen zu lösen versuchen, eine Skizze anfertigen oder etwas für sie Hilfreiches aufschreiben. Diese heuristischen Strategien und Hilfsmittel waren ihnen zwar durchaus bekannt, allerdings schien es so, als hätten sie diese ohne Hinweis nicht selbstständig im aktuellen Fall benutzt.

Ein paar Befragte gaben gleich nach dem Durchlesen der Angabe an, im ersten Moment keine Ahnung zu haben, was sie tun sollten, um die Aufgabe zu lösen. Andere schlossen gleich, dass es sich um Zahlen handeln müsse, die zumindest größer als 37 sind, da bis dahin zu viele und zu eng liegende Primzahlen sind.

Durch die gegebenen Hilfestellungen konnten alle Schülerinnen und Schüler die Aufgabe korrekt beantworten. Interessant sind daher die Angaben bei der Frage nach der Selbsteinschätzung. Dabei glaubten sechs, die Aufgabe sehr gut gelöst zu haben, acht eher gut, zehn eher nicht gut und eine oder einer gar nicht gut. Die Schwierigkeit der Aufgabe bewerteten zwei Befragte mit sehr einfach, zehn mit eher einfach, zwölf mit eher schwierig und erneut nur eine oder einer mit sehr schwierig.

8.2.10 Aufgabe 8 (mündlich)

Im ersten Durchgang erhielten 13 von 25 der mündlich befragten Schülerinnen und Schülern eine Summe, die kleiner als 1000 war. Der Durchschnitt der Werte, die unter 1000 betrugen, lag dabei bei etwa 883.

Im zweiten Durchgang waren es 14, der Durchschnitt lag bei etwa 887. Da der Durchschnitt mit Hilfe des arithmetischen Mittels berechnet wird, wirken sich „Ausreißer“ mit sehr niedrigen Werten auch auf den Durchschnittswert aus. Diese erwähnten niedrigen Werte kamen zustande, weil ein paar Schülerinnen und Schüler mit Sicherheit unter 1000 bleiben wollten und niedrige Ziffern in die erste Spalte schrieben – die Erkenntnis, dass man mit einer Summe von 8 in der ersten Spalte stets unter 1000 bleibt, fiel vielen auf, nachdem konkret dahingehend nachgefragt worden war.

Im dritten Durchgang schafften es 22 Schülerinnen und Schüler, unter 1000 zu bleiben, der Durchschnittswert lag bei 885. Es waren deutlich mehr Schülerinnen und Schüler, die in der ersten Spalte die Summe 8 geschrieben hatten und damit eine sichere, aber relativ gute Runde spielten.

Eine ähnlich eindeutige Durchschnitts-Strategie-Änderung wie in Gruppe α war in dieser Gruppe nicht zu erkennen. Einzelne Schülerinnen und Schüler achteten zwar mit jeder Runde mehr darauf, wie und in welcher Reihenfolge sie die Spalten befüllten, allerdings gab es wie bereits beschrieben auch andere Strategieversuche. Wie oben beschrieben, war in allen drei Durchgängen der Durchschnitt jener Werte, die unter 1000 blieben, immer in etwa gleich.

Ein Problem, das sich bedauerlicherweise herausstellte, war, dass manche Schülerinnen und Schüler wenig Gefühl für die Zahlen aufwiesen. Sie sind im Umgang mit ihnen ungeübt und durch die Verwendung des Taschenrechners im Unterricht sicherlich nicht gewöhnt, im Kopf rechnen zu müssen. So mussten manche alle drei dreistelligen Zahlen genau zusammenzählen, um herauszufinden, ob sie denn unter 1000 geblieben waren, obwohl beispielsweise die erste Spalte schon in Summe über zehn war.

Erstaunlich war, dass etwa neun Schülerinnen und Schüler fanden, dass bei diesem Spiel Glück wichtiger als Strategie wäre. Drei weitere hielten dieses Verhältnis für ausgeglichen. Auffallend war dabei jedoch auch, dass jene Schülerinnen und Schüler, die eine „gute“ und sichere Strategie verfolgten, auch der Meinung waren, dass man mit Strategie das Spiel gewinnen beziehungsweise das Risiko minimieren kann. Einige Befragte spielten eine andere Strategie, indem sie beispielsweise die hinteren Spalten zuerst befüllten, und gaben dann an, dass für ihre Strategie Glück nötig sei, um gute Ergebnisse erzielen zu können, weshalb sie das Glück für entscheidender hielten.

Grundsätzlich gaben die Schülerinnen und Schüler jedoch an, dass ihnen solche Spiele durchaus Spaß machen.

Wie auch bei manchen Schülerinnen und Schülern der Gruppe α wurde einigen in Gruppe β vor dem Spielen des dritten Durchgangs verraten, dass in diesem die Summe 999 möglich wäre. Einige behielten ihre davor ausgedachte Strategie bei. Bemerkenswert ist jedoch das Vorgehen einer befragten Person, die sagte, dieser Tipp helfe beim Ausdenken einer Strategie. Daraufhin schrieb sie alle Möglichkeiten auf, wie drei Würfelziffern zusammen jeweils die Summe 9 ergeben können (beispielsweise „3, 3, 3“ und „6, 2, 1“). Wurde eine Zahl dann im Spiel genannt, konnte aufgrund der aufgeschriebenen Tripel überlegt werden, wo und vor allem mit welchen anderen Zahlen die eben gewürfelte hingeschrieben werden muss. Die Schülerin oder der Schüler erhielt auch tatsächlich 999 als Summe.

8.3 Vergleiche und Unterschiede

Natürlich sticht sofort die Anzahl der korrekt gelösten Beispiele ins Auge. Dabei schneidet die Gruppe α erwartungsgemäß deutlich besser ab. Das Hauptaugenmerk in diesem Kapitel soll aber auf den Hintergründen liegen.

8.3.1 Heurismen

In diesem Abschnitt soll anhand der in Kapitel 2.3 dieser Diplomarbeit behandelten Heurismen untersucht werden, welcher davon sich die Schülerinnen und Schüler bei der Befragung bedienten.

Das systematische Probieren als heuristische Strategie wurde auch schon in den Analysen der Antworten erwähnt. Vor allem bei den Aufgaben 4, 5 und 7 war dies eine häufig angewandte Strategie. Beim Zählen der Palindrome schrieben einige, die nicht sofort eine allgemeine Darstellungsmöglichkeit gefunden hatten, einige Palindrome auf und schlossen damit entweder auf eine allgemeine Form, oder sie zählten die aufgeschriebenen Palindrome ab und multiplizierten und addierten sie gegebenenfalls so, dass sie auf eine Gesamtanzahl kamen. Die Systematik dahinter war meist eine solche, dass beispielsweise jene unter den ersten 100 Zahlen, anschließend jene zwischen 100 und 200 und schlussendlich jene zwischen 1000 und 2000 gesucht wurden. Damit konnte die Anzahl der Palindrome in den anderen Abschnitten leicht berechnet werden, ohne dass tatsächlich alle Palindrome aufgeschrieben werden mussten.

Bei Aufgabe 4 und dem Finden der Zerteilung eines Quadrates in 29 kleinere war Probieren die vorherrschende Strategie, was der Aufgabe auch einige Stimmen bei der Wahl zur unbeliebtesten Aufgabe einbrachte. Bei einer derartigen Aufgabe probieren die meisten zuerst einfach, eine solche Zerteilung zu finden. Den wenigsten gelingt dies auf Anhieb, deshalb probieren sie entweder wahllos weiter oder überlegen sich, welche Kriterien erfüllt sein müssen. Manche Schülerinnen und Schüler versuchten mit Hilfe der Quadratzahlen und deren Addition eine Lösung zu finden. Andere erkannten, dass die Zahl 29 die Summe einer ungeraden und einer geraden Zahl ist, und wieder andere gingen von ihren ersten Versuchen aus und versuchten eine Adaption durch Zusammenfügen oder Teilen von Quadraten auf eine korrekte Lösung zu kommen. Bei dieser Aufgabe scheint das Probieren fast unvermeidbar zu sein, wobei beispielsweise das Rückwärtsarbeiten als Probierstrategie einfließen kann. Die Überlegungen, wie die Zahl 29 zusammengesetzt werden kann, entspricht im Grunde genau dem Gedanken des Rückwärtsarbeitens, denn man weiß, dass man schlussendlich 29 Quadrate braucht. Im

Anschluss überlegt man, wie man beispielsweise auf die Zerteilung eines Quadrates in 9, 4 und 7 kleinere Quadrate kommen kann, um das große Quadrat vierteln zu können, und wie man von diesen vieren zwei in 9, eines in 4 und eines in 7 Quadrate zerteilen kann, wie es auch eine Schülerin oder ein Schüler gemacht hat. Auf anderen Zeichnungen der Zerteilung ist zu erkennen, dass ein großes Quadrat gezeichnet worden war und anschließend überlegt wurde, wie man 28 Quadrate so anlegen kann, damit das Ganze wieder ein Quadrat ist. Dies ist beispielsweise mit der Methode, in der man 28 kleine Quadrate um ein größeres herumlegt, möglich.

Beim Bearbeiten der Aufgabe 7 im mündlichen Teil begannen viele Schülerinnen und Schüler damit, die Primzahlen der Reihe nach durchzugehen und auszuprobieren, ob sie einfach zu einer Lösung kommen. Gerade in Gruppe α gaben viele an, auch bei anderen Aufgabenstellungen, wie beispielsweise jenen bei mathematischen Wettbewerben, zu allererst ein paar Dinge auszuprobieren, um eine Lösungsidee zu erhalten und weitere Strategien entwickeln zu können.

Das systematische Probieren scheint also eine unverzichtbare Strategie zu sein, die der Gruppe α oftmals auch zu Vorteilen gegenüber der Gruppe β verholfen hat. Es scheint, dass geübte Problemlöserinnen und Problemlöser nicht sofort erkennen müssen, was eigentlich zu tun sei oder wie man das Ergebnis unverzüglich berechnet, sondern dass sie in gewisser Weise die Geduld besitzen, zuerst etwas auszuprobieren und sich damit ein Bild von der Aufgabe und deren möglichen Lösungswegen machen können sowie möglicherweise dadurch die Aufgabe auch noch besser verstehen.

Ein Paradebeispiel für das Vorwärtsarbeiten waren die meisten der korrekten Lösungen zu Aufgabe 2. Natürlich spielte dabei vor allem in Gruppe α auch der Analogieschluss eine wichtige Rolle, denn solche Aufgaben gehören zum zentralen Bestandteil in Mathematik-Olympiade-Kursen. Das Vorwärtsarbeiten funktionierte jedoch bei dieser Aufgabe stets so, dass zuerst im einen Dreieck der fehlende Winkel gesucht wurde, damit geschlossen werden konnte, dass dieses Dreieck ein gleichschenkeliges Dreieck war, somit auch das andere Dreieck ein solches sein musste und damit δ einfach berechnet werden konnte.

Für die Gruppe β gab es wahrscheinlich bei Aufgabe 6 die meisten Analogieschlussmöglichkeiten. Flächenberechnungen von Dreiecken werden auch im Mathematikunterricht relativ oft durchgeführt, weshalb dies kaum Probleme bereitete und viele Schülerinnen und Schüler auch die Lösungsmöglichkeit einer Berechnung wählten, da sie in solchen geübt waren. Dadurch konnten sie bei diesem neuen Problem auf Bekanntes schließen und die Aufgabe somit lösen.

Als heuristische Hilfsmitteln wurden besonders Skizzen und Tabellen verwendet. Erstere, die auch als informative Figuren bezeichnet werden können, spielten teilweise in Aufgabe 7 eine große Rolle. Während einige Schülerinnen und Schüler selbstständig etwas aufzeichneten, wurde jenen, die keine eigene Lösungsidee hatten, oftmals als Tipp gegeben, alle gegebenen Informationen durch eine Skizze wiederzugeben.

Teilweise matrixähnliche Tabellen sind bei manchen Lösungsversuchen bei Aufgabe 5 zu finden. In dieser wurden Palindrome eingetragen. Durch das Auflisten in dieser Form konnte durch die Multiplikation von Zeilen- und Spaltenanzahl auf die Anzahl der Palindrome in einem gewissen Zahlenbereich geschlossen werden.

Das Zerlegen und Ergänzen als heuristisches Prinzip war oftmals zu finden. Gerade bei Aufgabe 6 zerteilten viele Schülerinnen und Schüler die Flächen. Dieses Zerteilen benutzten manche, um die Flächen zu berechnen, andere schlossen direkt durch Umlegen oder Ergänzen darauf, dass sie gleich groß sein mussten.

Fallunterscheidungen wurden interessanterweise bei Aufgabe 5 benutzt, da manche Befragte zuerst die Anzahl jener Palindrome ermittelten, die aus lauter gleichen Ziffern bestehen, und anschließend jene Fälle betrachteten, in dem die inneren Ziffern ungleich der äußeren sind.

Selbstverständlich wurden auch andere Heurismen vereinzelt eingesetzt, die am meisten verwendeten wurden jedoch eben beschrieben. Wahrscheinlich haben wenige bis keine der Schülerinnen und Schüler von diesen Heurismen im theoretischen Sinne gehört, sondern sie durch Übung und aus Intuition eingesetzt. Das bedeutet für die Praxis, dass sich die oder der Lehrende der Vielzahl an Heurismen durchaus bewusst sein sollte, den Schülerinnen und Schülern jedoch vor allem ihre Anwendung vermitteln und darüber hinaus zulassen sollte, dass diese selbst Strategien und Hilfsmitteln entwickeln.

8.3.2 „Lösung nicht gefunden“ und andere Gründe, eine Aufgabe (nicht) zu mögen

Am Ende der schriftlichen Befragung wurden die Schülerinnen und Schüler gebeten, Begründungen anzugeben, warum sie einzelne Aufgaben der Befragung besonders oder eben gar nicht mochten. Auffallend war, dass die Gründe für das Nicht-Gefallen in Gruppe β zum Großteil das Nicht-Verstehen der Aufgabe und das Nicht-Finden einer Lösung waren. In der

Gruppe α wurde dagegen dies als Begründung für die Lieblingsaufgabe angegeben. Dabei gab es einige Male tatsächlich die Aussage, dass die befragte Person noch keine Lösung gefunden hatte und sie die Aufgabe deshalb besonders möge. Andererseits fand sich auch oftmals die Erklärung, dass die Befragten zuerst nicht wussten oder erkannten, wie die Aufgabe zu lösen sei, man länger nachdenken müsse und durch ein Aha-Erlebnis die Freude an der Lösung vergrößert werde.

Um diese Freude empfinden zu können, braucht es also offenbar auch in den Augen der Schülerinnen und Schüler einen Heureka-Effekt. Diesen erreicht man, indem man durch eine selbst ausgedachte Idee auf eine Lösung kommt und nach dem Bearbeiten der Aufgabe eine Erkenntnis mehr hat als davor.

Wie auch Bruder und Collet (2011, S. 35) anmerken, stärken solche Erfahrungen, die bei der erfolgreichen Lösung eines Problems gesammelt werden, das Selbstbewusstsein bezüglich der eigenen Problemlösekompetenz. Wer also öfter erfolgreich Probleme löst, geht positiver gestimmt an die folgenden heran. Allerdings sollte die Komplexität der Probleme stets so gewählt werden, dass sie zwar eine Herausforderung für die Schülerinnen und Schüler darstellen, jedoch schaffbar sind, damit die Problemlösenden überhaupt die Chance auf einen Heureka-Effekt haben. Diesbezüglich waren die Aufgaben der Befragung möglicherweise für die Gruppe β am oberen Rand des Schwierigkeitsgrades angesiedelt, speziell für die jüngsten Befragten. Allerdings gab es auch in dieser Kategorie bei jeder Aufgabe korrekte Lösungen oder zumindest zielführende Ideen und Lösungsvorschläge. Im Gegenzug waren die ältesten Befragten der Gruppe α bei manchen Aufgaben geradezu unterfordert. Bei ihren Begründungen für die (un-)beliebtesten Aufgaben war auch tatsächlich zu finden, dass sie eine Aufgabe zu trivial fanden oder umgekehrt eine Aufgabe deshalb gut fanden, weil sie einen Trick anwenden konnten, ein Aha-Erlebnis hatten oder weil sie das Finden der Palindrom-Formel ansprechend und interessant fanden.

Einfachheit und Logik waren hingegen in der Gruppe β die häufiger genannten Gründe für die beliebtesten Aufgaben. Selbstverständlich gibt es in dieser Gruppe aber auch jene, die es positiv fanden, dass sie bei der einen oder anderen Aufgabe denken mussten oder kreative Vorgehensweisen erforderlich waren.

Geht man auf die Definition einer Problemlöseaufgabe zurück, so findet man unter anderem, dass ein Problem etwas individuell Schwieriges ist (Bruder & Collet, 2011, S. 11,15). Eine Aufgabe kann für eine Person sehr trivial sein, während sie für andere ein wirkliches Problem darstellt. Auch in der schriftlichen Befragung gab es einige solcher Aufgaben. Selbstverständlich sind solche Divergenzen manchmal durch unterschiedliche Altersstufen und somit unterschiedlichen Kenntnissen in Mathematik beziehungsweise durch vertiefende Beschäftigungen wie in einem Mathematik-Olympiade-Kurs bedingt. Allerdings wurden auch in der gleichen Gruppe in der gleichen Alterskategorie oftmals alle Antwortmöglichkeiten von „sehr einfach“ bis hin zu „sehr schwierig“ angekreuzt. Diese individuell unterschiedlichen Einschätzungen wirken sich daher auch auf die Beliebtheitsstatistik aus.

Was sich aber in beiden Gruppen gezeigt hat, war, dass jede Aufgabe in jeder Gruppe sowohl bei den Lieblings- als auch bei den nicht gemochten Aufgaben aufgrund der unterschiedlichsten Gründe mindestens einmal erwähnt wurde. Das zeigt, wie individuell die Empfindungen der Schülerinnen und Schüler sind. Man kann also nicht davon ausgehen, dass es Aufgaben gibt, die allen Schülerinnen und Schülern gleichermaßen gut gefallen und die sie gerne bearbeiten. Stattdessen sollte man durch große Abwechslung jeder und jedem die Möglichkeit geben, für sie oder ihn interessante Aufgaben bearbeiten zu können.

Gerade was geometrische Aufgaben betrifft, waren weitere Meinungsverschiedenheiten erkennbar. In beiden Gruppen wurde die geometrische Lösungsmöglichkeit oder die geometrische Komponente der Aufgabe positiv und auch negativ erwähnt. Es gibt also Schülerinnen und Schüler, die Aufgaben genau deshalb interessant finden, da sie geometrische Elemente enthalten, wobei andere damit nicht so gut klarkommen und beispielsweise lieber „rechnen“.

8.3.3 **Training – Hilfe oder Verhängnis**

Betrachtet man Aufgabe 4 beziehungsweise die Lösungsideen der Schülerinnen und Schüler dabei, fällt ein großer Unterschied zwischen den beiden Gruppen auf. In Gruppe α wurden weit häufiger theoretische Überlegungen angestellt, wie man die Summe von 29 Quadraten erreichen kann. Dabei spielten die Quadratzahlen eine große Rolle sowie jene bereits erwähnten Überlegungen, dass die Zahl 29 mit Hilfe einer Addition aus mindestens einer geraden und einer ungeraden Zahl zusammengesetzt sein muss.

Gerade Überlegungen, die sich um ausschließliche Teilung in Quadratzahlen drehten, führten oftmals zu keinem Ergebnis. Dabei scheint es so, als wären manche durch das „Training“ darauf fixiert, dass Quadrate sich ausschließlich in eine Anzahl wie beispielsweise vier oder neun zerteilen lassen, und haben deshalb nicht bedacht, dass es auch ganz andere Aufteilungen geben kann. Allerdings kann es durchaus sein, dass diese „antrainierten“ Überlegungen zwar die ersten waren, die angestellt wurden, man jedoch durch Überlegen erkannte, dass es möglicherweise doch andere Möglichkeiten gibt. Selbstverständlich haben die Befragten der Gruppe α in dieser Hinsicht einen Vorteil, denn mit geläufigen Quadratzahlen kann man selbstverständlicher und schneller ausprobieren.

In der Gruppe β war dieser Ansatz selten, aber durchaus vorhanden. Leider passierte es unter anderem, dass die Folge der Quadratzahlen mit „4, 8, 16, 32“ angegeben wurde und daher falsche Schlüsse gezogen wurden, oder dass einzelne Rechtecke eingezeichnet wurden. In diesen Fällen spielt das deutlich weniger vorhandenere Training beziehungsweise die geringere Beschäftigung mit ähnlichen Themen eine große Rolle: Natürlich sollten die Eigenschaften eines Quadrates und die Quadratzahlen geläufig sein, allerdings ist es verständlich und nachvollziehbar, dass bei seltener Beschäftigung damit solches Wissen nicht geläufig ist.

Auch in der Gruppe β wurde beispielsweise bei Aufgabe 6 deutlich, dass ein gewisses Training vorhanden ist. Die Berechnung des Flächeninhalts der markierten Flächen war für die meisten, die sich für eine Berechnung entschieden, nicht unbekannt. Viele setzten die angegebenen Zahlen ein, was ihrer Gewohnheit entspricht, denn im Großteil der Fälle wird in der Schule mit Zahlen gerechnet. In dieser Hinsicht bemerkte man auch wieder den Trainingsvorsprung der Gruppe α, die selbstverständlicher mit Variablen umgehen und daher die Zusatzfrage öfter beantworten konnte.

Das intensive oder eben weniger intensive Training heuristischer Strategien ist der bei Aufgabe 7 am stärksten auftretende Unterschied zwischen den beiden Gruppen. Natürlich ist den Schülerinnen und Schülern eines Mathematik-Olympiade-Kurses auch der Umgang mit Primzahlen vertraut, allerdings konnten erhebliche Unterschiede bei der Herangehensweise an die Aufgabe festgestellt werden. Geübte Problemlöserinnen und Problemlöser, wie sie in Gruppe α zu finden sind, begannen sofort, Primzahlen aufzuzählen, auszuprobieren oder aufzuzeichnen. Einige gaben auch im Gespräch an, dass sie grundsätzlich ein paar Beispiele durchgehen und ausprobieren, um sich eine Idee über die Lösbarkeit der Aufgabe zu machen, wenn sie nach dem Lesen der Angabe nicht sofort wüssten, was zu tun sei. Durch das Probieren erhofften sie sich, entweder gleich auf eine Lösung zu kommen oder zumindest etwas ausschließen oder einschränken zu können.

Unter den Befragten der Gruppe β gab es selbstverständlich auch Schülerinnen und Schüler mit dieser Herangehensweise. Obwohl ihnen die Primzahlen nicht so geläufig waren, gaben sie an, die Zahlen durchzugehen und auszuprobieren. Doch es gab auch jene, die nach dem Lesen der Angabe angaben, sie hätten keine Ahnung, wie sie beginnen könnten. Auf Nachfrage hin hatten sie die Angabe prinzipiell verstanden, ein paar Schülerinnen und Schüler sagten jedoch, sie würden sich mit Primzahlen nicht gut auskennen, kannten allerdings ihre Grundeigenschaften. Ihnen musste oftmals geholfen werden, indem man sie dazu animierte, die geforderten Eigenschaften an einigen selbst gewählten Beispielzahlen auszuprobieren, oder eine Skizze anzufertigen und darin alles einzutragen, was als Information bekannt ist.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Gruppe α grundsätzlich nicht nur inhaltlich gut trainiert war, sondern der Vorteil bezüglich des Problemlösens besonders darin bestand, heuristische Strategien und Hilfsmittel selbstständig einsetzen zu können. Diese sollten in einem Unterricht, der die Schülerinnen und Schüler mit Problemlöseaufgaben beschäftigt, auch vermittelt und gefördert werden.

Den überspitzt genannten „Nachteil des Trainings“, den die Befragten der Gruppe α möglicherweise hatten, da sie sich teilweise auf Inhalte wie die Quadratzahlen konzentrierten, glich sich wohl damit aus, dass sie aufgrund ihrer Routine im Problemlösen andere Wege und Methoden fanden.

8.3.4 Selbsteinschätzung und individueller Schwierigkeitsgrad der Aufgaben

In den vorherigen Kapiteln wurde bereits vereinzelt die Selbsteinschätzung der Schülerinnen und Schülern bei den entsprechenden Aufgaben erwähnt.

Betrachtet man die Anzahl der korrekt gelösten Aufgaben und die Selbsteinschätzung der Befragten dazu, fällt auf, dass sich Gruppe β meistens verhältnismäßig besser einschätzte als sie tatsächlich – gemessen an der Anzahl der korrekten Lösungen – war. Immerhin mussten die Schülerinnen und Schüler auch angeben, wie gut sie ihrer Meinung nach die Aufgabe gelöst hatten und dabei zählt schließlich nicht der kreative Lösungsweg, sondern die erhaltene Lösung selbst.

In Gruppe α lagen die meisten Schülerinnen und Schüler richtig in ihrer Einschätzung. Lediglich bei der Aufgabe mit den Palindromen glaubten manche, sie hätten die Aufgabe eher oder sehr gut gelöst, wobei sie, wie bereits in der Analyse der Antworten erwähnt, meistens durch Denkfehler auf ein falsches Ergebnis gekommen waren.

In der Gruppe β gibt es hingegen mehr Schülerinnen und Schüler, die dachten, sie hätten die eine oder andere Aufgabe eher oder sehr gut gelöst, obwohl dies nicht der Fall war. Natürlich muss an dieser Stelle angemerkt werden, dass sich die Unterschiede in der Anzahl der korrekten Lösungen auch auf diese Statistik auswirken – bei einer Aufgabe, die beinahe alle Befragten lösen konnten, konnten sich die Schülerinnen und Schüler nur eher „zu schlecht" einschätzen, während die andere Gruppe, die als Gesamtheit manche Aufgaben nur sehr selten lösen konnte, sich klarerweise eher „zu gut" einschätzte.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass sich die Schülerinnen und Schüler der Gruppe α genauer einschätzen konnten als jene der Gruppe β. Das könnte damit zusammenhängen, dass sie mehr Erfahrung im Problemlösen haben und schon oftmals ihre Lösungswege analysiert und ihre Ergebnisse korrigiert (bekommen) haben. Dabei kommt man unweigerlich wieder auf die vierte Phase bei Pólya: wer nach dem Problemlösen eine Rückschau hält, erhöht in weiterer Folge nicht nur seine Problemlösekompetenzen an sich, sondern auch das Gefühl dafür, ob ein Lösungsweg richtig sein kann oder nicht.

Nicht überraschend gab Gruppe β in Summe an, die Aufgaben schwieriger empfunden zu haben, allerdings nur unverhältnismäßig schwieriger zur Anzahl der korrekten Lösungen. Betrachtet man die prozentuelle Häufigkeit der angekreuzten Antworten auf die Frage der Schwierigkeit und fasst jeweils „sehr" und „eher" einfach, beziehungsweise „sehr" und „eher" schwierig zusammen, so fällt auf, dass die Aufgaben 3 und 6 für Gruppe α nur knapp einfacher schienen. Bei Aufgabe 6 ist zu erwähnen, dass 50 Prozent der Befragten in Gruppe α diese Aufgabe als sehr einfach empfanden und nur etwa 26 Prozent in Gruppe β. Dafür gab es niemanden in beiden Gruppen, der diese Aufgabe sehr schwierig fand.

Bei den Aufgaben 4, 5 und 7 beträgt die Differenz über 20 Prozent, was bedeutet, dass schon ziemlich deutlich mehr Befragte der Gruppe α die Aufgabe sehr oder eher einfach fanden. Betrachtet man bei diesen Aufgaben allerdings die genauen Antworthäufigkeiten, so kann festgestellt werden, dass die Antworten „sehr einfach" und „sehr schwierig" von beiden Gruppen mit deutlich weniger Unterschied in der Häufigkeit angekreuzt wurden, während die

Unterschiede bei den Antwortmöglichkeiten „eher schwierig“ und „eher einfach“ deutlicher sind.

Bei Aufgabe 2 wird der Unterschied am deutlichsten sichtbar. Sie ist auch jene Aufgabe, bei der der Unterschied in der Anzahl der korrekten Lösungen am größten war, weshalb die Zahlen an dieser Stelle erwartungsgemäß deutlich ausfallen. Knapp zwei Drittel der Befragten aus Gruppe α fanden die Aufgabe sogar sehr einfach, während dies nur acht Prozent der Gruppe β fanden. Dafür war sie für knapp ein Viertel sehr schwierig, während dies in Gruppe α niemand so empfand. In Gruppe α fanden somit 86 Prozent der Befragten die Aufgabe sehr oder eher einfach, in der Gruppe β lediglich 40.

Einzig Aufgabe 8 war im subjektiven Empfinden für die Schülerinnen und Schüler der Gruppe β einfacher. Während sich in beiden Gruppen jeweils drei Befragte für die Antwort „sehr einfach“ und jeweils niemand für „sehr schwierig“ entschieden, gaben in Gruppe β ein paar wenige Leute mehr „eher einfach“ an als in Gruppe α.

8.3.5 Unterschiede zwischen den Alterskategorien

Im Gesamtdurchschnitt haben die Schülerinnen und Schüler der Kategorie A am meisten Aufgaben lösen können und jene der Kategorie C am wenigsten. Während der Verlauf von A über B zu C in der Gruppe β auch deutlich erkennbar ist, sind die Kategorien A und B in der Gruppe α gleichauf. Dies könnte damit begründet werden, dass bei dem Schwierigkeitsgrad der Aufgaben bereits jene Befragten der Kategorie B bereits genügend Problemlöseerfahrung aufweisen, um diese zum Großteil lösen zu können. Hingegen entwickeln jene Schülerinnen und Schüler, die keinen Mathematik-Olympiade-Kurs besuchen, mit der Zeit mehr und mehr Problemlösestrategien.

Eindeutige Unterschiede bei den Lösungsmethoden waren zwischen den Altersgruppen nicht zu erkennen. Erwartungsgemäß sahen die Älteren bei manchen Aufgaben schneller, wie etwas darstellbar oder berechenbar ist, während die Jüngeren beispielsweise zuerst ausprobieren mussten, um ein Schema zu entdecken. Einzig auffällig war, dass in der Gruppe β die jüngsten Befragten bei Aufgabe 4 häufig das Quadrat mit Hilfe von Ideen wie der Teilung einer Seite in $\sqrt{29}$ gleich große Abschnitte oder ähnlichen Ansätzen zerteilen wollten, was zeigt, dass sie diese mathematischen Inhalte nicht so sehr verinnerlicht hatten, um erkennen zu können, dass dies in der Praxis nicht möglich ist. An und für sich ist es etwas verwunderlich, dass bei dieser

Aufgabe so viele falsche Lösungswege versucht wurden. Immerhin könnte man meinen, die Aufgabe sei (mathematisch) nicht schwierig zu verstehen, da es sich im Grunde um ein praxisbezogenes Problem handelt, bei dem schulmathematische Kenntnisse eigentlich nicht gebraucht werden.

Bei der Reflexion zu Aufgabe 8, dem Würfelspiel, ist noch zu erwähnen, dass in Gruppe β die jüngsten Befragten angaben, sie hätten die Aufgabe sehr oder eher gut gelöst und würden sie auch sehr oder eher einfach finden. In den Kategorien A und B hingegen gab es auch Schülerinnen und Schüler, die sich für „eher nicht so gut gelöst" beziehungsweise „eher schwierig" entschieden. Dieser Trend zeichnet sich allerdings in Gruppe α nicht so deutlich ab.

8.3.6 Gefühl für Aufgaben und Ergebnisse

Problemlösen besteht einerseits aus dem Verstehen der Aufgabenstellung sowie dem Ausdenken und Ausführen eines Plans, andererseits auch aus der Rückschau. In dieser letzten, laut Pólya (1949) unglaublich wichtigen, aber oft vernachlässigten Phase, soll noch einmal die erhaltene Lösung betrachtet und überprüft werden, ob sie tatsächlich richtig ist. Auf diese Weise kann auch ein Gefühl entwickelt werden, ob die erhaltene Lösung der Größenordnung der richtigen Lösung überhaupt entsprechen kann.

Betrachtet man dazu die Antworten bei Aufgabe 5, so sieht man eine Vielzahl an unterschiedlichen Lösungen für die Anzahl der Palindrome, die kleiner als 10000 sind. Diese bewegen sich von zweistelligen bis hin zu mittelhohen vierstelligen Zahlen. Entweder wurde der Aufgabentext nicht richtig verstanden oder die Lösung der Aufgabe nicht mehr analysiert. Wären nämlich beispielsweise 5000 der ersten 10000 Zahlen Palindrome, würde das bedeuten, dass durchschnittlich jede zweite Zahl ein Palindrom ist. Probiert man das bei den ersten 100 aus, wird man einfach und schnell erkennen, dass diese 18 Palindrome viel zu wenige für ein solches Ergebnis sind. Geht man dann versuchsweise etwas weiter und überlegt sich, ob es bei höheren Zahlen immer mehr oder weniger Palindrome gibt, erkennt man, dass diese Häufigkeit auch bei größeren Zahlen auftritt. Somit kann in kürzester Zeit festgestellt werden, dass die erhaltene Anzahl nicht stimmen kann. Dies bedeutet noch nicht, dass man daraufhin sofort die richtige Anzahl berechnen kann, jedoch ist es schon ein großer Schritt, feststellen zu können, in welcher Größenordnung sich das Ergebnis wohl nicht bewegen wird.

Ähnlich verhält es sich bei geringen Anzahlen von Palindromen, wobei in diesem Fall meistens einfach zu viele Möglichkeiten ausgelassen wurden, wenn beispielsweise nur jene Palindrome gezählt wurden, die aus lauter gleicher Ziffern bestehen. In diesem Fall sollte jedoch auch beim Lesen der Angabe auffallen, dass dort die Zahl 1991 als Beispiel für ein Palindrom angegeben wurde, die offensichtlich nicht aus vier gleichen Ziffern besteht. Auch hierfür eignet sich das systematische Probieren, um abschätzen zu können, ob das Ergebnis stimmen kann.

Zusammenfassend kann speziell zu Aufgabe 5 gesagt werden, dass zwei der vier Phasen von Pólya zentral sind: das Verstehen der Aufgabe und die Rückschau. Man sollte sich überlegen, was Palindrome sind, und am Ende grob überprüfen, ob das Ergebnis stimmen kann. Dabei hilft oft Probieren, allerdings besagt das nicht, dass ein gut durchdachter systematischer Lösungsweg falsch ist. Dennoch ist auch hierbei die Rückschau außerordentlich wichtig, auch um beispielsweise zu erkennen, dass der erste Tausenderschritt doppelt gezählt wurde, was den Schülerinnen und Schülern mit einer an und für sich effizienten und richtigen Lösungsidee auch – wie eben schon erwähnt – tatsächlich passiert ist.

Bei Aufgabe 8, dem Würfelspiel, war bei einigen wenigen, aber einer nicht vernachlässigbaren Menge an Schülerinnen und Schülern erkennbar, dass sie wenig Gefühl für Zahlen beziehungsweise deren Summe aufwiesen. Das Problem, dass nicht auf den ersten Blick erkannt wird, dass man mit den Einträgen „5“, „3“ und „2“ in der ersten Spalte bereits über 1000 ist, dürfte auf den häufigen Gebrauch des Taschenrechners und das seltene Kopfrechnen zurückzuführen sein. Natürlich waren jene Schülerinnen und Schüler, die beim Kopfrechnen nicht so schnell waren, bei diesem Spiel im Nachteil, denn die einzutragenden Ziffern wurden relativ schnell, etwa alle drei Sekunden, genannt. Wenn also beispielsweise schon „5“ und „3“ in der ersten Spalte stehen, brauchten diese Schülerinnen und Schüler zu lange, um zu erkennen, dass einzig die „1“ noch eine Möglichkeit wäre, möglicherweise unter 1000 zu bleiben. Bei diesem Spiel vermischen sich also Strategie und Kopfrechenfähigkeiten, wobei letztere eigentlich nicht über einen Zahlenraum von 1 bis 19 hinausgehen müssen.

Dieses Gefühl für den Umgang mit Zahlen war tendenziell in Gruppe α besser. Mehr Befragte erkannten beispielsweise, dass man sicher unter 1000 bleibt, wenn in der ersten Spalte in Summe 8 steht, denn da die Ziffern maximal 6 sein können, kann höchstens ein Zehnerübertrag zustande kommen und die Hunderterstelle so auf die gewünschte 9 erhöhen. Dadurch konnten sie auch erkennen, dass es sich auszahlt, in die zweite Spalte hohe Zahlen zu setzen, wenn man in der ersten Spalte 8 hat. Die fehlende Übung und Geläufigkeit führte deshalb bei manchen Schülerinnen und Schülern dazu, dass sie trotz guter Grundstrategie in der Situation unter Zeitdruck die eine oder andere Zahl an die falsche Stelle setzten.

Teil III

Folgerungen

9 Aspekte des Problemlösens im Unterricht

In diesem Teil sollen einige Aspekte betrachtet werden, welche sich aufgrund der Befragungen als wichtig herausgestellt haben und welche beim Problemlösen-Lernen im Mathematikunterricht beachtet und vermittelt werden sollten. Großteils haben diese Aspekte für das Problemlösen aller Schülerinnen und Schüler Gültigkeit, jedoch wurde in dieser Diplomarbeit mehr Wert auf die Förderung von Interesse und Begabung Wert gelegt, weshalb einige Punkte auch in Hinblick darauf betrachtet werden sollten.

9.1 Differenzierung und Individualisierung im Unterricht

Das Stichwort der Individualisierung ist im Bereich der Begabtenförderung ein großes und häufig gebrauchtes. Das Bundesministerium für Bildung gibt die Differenzierung und Individualisierung als einen Parameter zur Begabtenförderung an und fordert im zweiten Parameter, dem „Enrichment", dass Begabten die Möglichkeit geboten werden soll, sich mit Inhalten, die über den Unterrichtsstoff hinausgehen, zu beschäftigen (Bundesministerium für Bildung, online).

Problemlösen kann im Mathematikunterricht als Möglichkeit der Differenzierung und Individualisierung angewandt werden. Durch Öffnen von Aufgaben, durch zusätzliche Fragen und Aufgabenstellungen dazu, wie beispielsweise Verallgemeinerungen und Beweise, oder durch individuelle Aufgaben für jene, die anderen im Erfassen des Schulstoffes deutlich voraus sind, schafft man eine Förderungsmöglichkeit für Begabte und Interessierte im Rahmen des Regelunterrichts. Zwar gibt es Förderungsmöglichkeiten wie die Mathematik-Olympiade-Kurse, allerdings finden diese zusätzlich zum „normalen" Unterricht statt und sind kein Mittel dafür, die Unterforderung im Mathematikunterricht selbst zu verhindern.

9.2 Die vier Phasen nach Pólya mit Beachtung der Rückschau

Die ersten drei Phasen bei Pólya scheinen einleuchtend und essentiell für das Lösen von Aufgaben. Wer die Aufgabenstellung nicht verstanden, keinen geeigneten Plan ausgedacht oder diesen nicht richtig ausgeführt hat, kann unmöglich zu einem korrekten Ergebnis kommen. Dies gilt im Grunde auch für Routineaufgaben, wobei in diesem Fall das Ausdenken eines Plans sehr schnell geschieht, da von vornherein meist klar ist, wie die Aufgabe gelöst werden kann.

Worauf also bei Problemlöseaufgaben Wert gelegt werden soll, ist das Ausdenken eines Plans. Dies beinhaltet einerseits die Überlegung, ob man ähnliche Aufgaben bereits gelöst hat, und andererseits auch das Überlegen eines eigenen Lösungsweges. Dabei gilt es, Heurismen so zu nutzen, dass alle Bedingungen der Aufgabenstellung eingehalten sowie alle Daten verwendet wurden (Pólya, 1949). Um Schülerinnen und Schülern dabei zu helfen, gerade bei Problemen mit Lösungswegen in mehreren Schritten dieses Ausdenken des Plans zu erleichtern, kann ein Lösungsgraph als heuristisches Hilfsmittel dienen.

Eine der vier Phasen von Pólya scheint jedoch immer noch vernachlässigt zu werden: die Rückschau. Während bei Routineaufgaben die Rückschau hauptsächlich darin besteht, zu überprüfen, ob die Größenordnung des Ergebnisses stimmen kann oder ob Fehler in der Berechnung passiert sind, geht es bei Problemlöseaufgaben zusätzlich darum, ob die Lösung aufgrund von logischen Schlussfolgerungen erreicht wurde und ob diese auch tatsächlich gelten. Bei den Befragungen der Schülerinnen und Schüler fiel auf, dass einige auf eine solche Rückschau nicht trainiert schienen, wie in den Analysen bereits erwähnt wurde.

Es gibt verschiedene Wege, um nach dem Lösen einer Aufgabe zu überlegen, wie plausibel das Ergebnis erscheint. Auf jeden Fall sollte Schülerinnen und Schülern ein Gefühl für Zahlen vermittelt werden, welches ihnen hilft, beispielsweise abschätzen zu können, ob unter 10000 Zahlen tatsächlich durchschnittlich jede zweite ein Palindrom sein kann. Des Weiteren sollten sie darin gefördert werden, verschiedene Lösungsmethoden kennenzulernen, um die Lösung mit zumindest einer weiteren Idee annähernd abschätzen und damit zu kontrollieren zu können. Am wichtigsten erscheint jedoch, dass Schülerinnen und Schülern die Wichtigkeit einer solchen Rückschau vermittelt wird. Eine solche muss keine zeitintensive Beschäftigung implizieren, sondern lediglich eine geeignete Idee beinhalten, mit der man ungefähr nachprüfen kann, ob das Ergebnis überhaupt stimmen kann. Des Weiteren muss durch konsequentes Anwenden einer Rückschau gezeigt werden, dass nicht nur eigene Fehler gefunden werden, sondern möglicherweise leichtere Lösungswege entdeckt und bei zukünftigen Problemen angewandt werden können.

Eine Rückschau kann außerdem auch nach einer Kontrolle des Ergebnisses erfolgen. Wenn die Lehrperson die Schülerinnen und Schüler dazu anregt, ihre Fehler selbst zu suchen oder zumindest auszubessern, sollten diese in Zukunft verringert oder vermieden werden können und das Aufgabenlösen somit verbessert werden.

Zudem verbessert sich durch das regelmäßige Betrachten der eigenen Lösungswege auch die Fähigkeit, selbst besser einschätzen zu können, wie gut man die Aufgabe gelöst hat. Wer nachgeprüft hat, ob sein Ergebnis stimmen kann, kann auch eher davon ausgehen, dass dieses korrekt ist. Sollte man bei der Rückschau feststellen, dass das Ergebnis nicht stimmen kann, hilft sogar schon diese Erkenntnis, auch wenn man möglicherweise zuerst keine Idee hat, worin der Fehler besteht.

9.3 Verschiedene Heurismen vermitteln

Das Anerkennen von verschiedenen Lösungswegen ist Voraussetzung für die Lehrperson beim Problemlösen. Wenn die Lehrperson in irgendeiner Weise vorgibt, welche Strategien und Methoden „die besten“ sind, so ist die Chance für die Schülerinnen und Schüler gemindert, sich ihre eigenen Ideen zu entwickeln und zu verfeinern. Allerdings können den Schülerinnen und Schülern durchaus verschiedene Heurismen gezeigt und sie dazu angeregt werden, diese für sich auszuprobieren und jeweils passende auszuwählen.

Im Grunde können alle in Kapitel 2.3 beschriebenen Heurismen vermittelt werden, beispielsweise anhand von geeigneten Aufgaben. Es gilt stets zu betonen, dass dies Möglichkeiten seien und deren Anwendung keinerlei Verpflichtung darstellen – ansonsten würde aus dem Problemlösen schnell ein Bearbeiten einer Routineaufgabe werden.

Im Folgenden seien noch zwei Punkte aufgelistet, die aufgrund der Befragung der Schülerinnen und Schüler als besonders erwähnenswert erscheinen.

9.3.1 Probieren

Einer der deutlichsten Unterschiede zwischen den beiden befragten Gruppen war besonders bei Aufgabe 7, wie die Schülerinnen und Schüler an das Lösen der Aufgabe herangegangen sind. Dabei war auffällig, dass viele wettbewerbserprobten Schülerinnen und Schüler zuerst einmal ein paar Zahlen ausprobierten. In der Vergleichsgruppe gab es aber durchaus Befragte, die absolut nicht wussten, wie sie an eine solche Aufgabe herangehen sollten.

Auch bei Aufgabe 4 war der Unterschied in der Lösungshäufigkeit zwischen den beiden Gruppen relativ groß. Zwar konnte bei dieser Aufgabe auch systematisch überlegt werden, wie das Quadrat in 29 kleinere zerteilt werden könnte, jedoch fanden einige Schülerinnen und Schüler eine korrekte Antwort durch Probieren. Dieses Probieren war zwar etwas, was manchen

Schülerinnen und Schüler nicht gefiel und weswegen sie die Aufgabe nicht mochten, anderen wiederum machte dies Spaß. Gezeigt hat sich allerdings, dass diese Aufgabe, bei der Probieren wohl die größte Rolle spielte, von Gruppe α eindeutig häufiger gelöst werden konnte.

Davon kann das Motto „Tu etwas!“ abgeleitet werden. Wer also nicht verstanden hat, was zu tun sei, sollte die Aufgabenstellung erneut durchlesen, sie mit eigenen Worten formulieren, in Stichworten zusammenfassen oder ähnliches, um herauszufinden, was gegeben und was gesucht ist. Wenn dies bekannt ist, kann die Bedingung an ein paar Beispielen ausprobiert werden, um möglicherweise eine Idee zu bekommen, ob und wie ein geeigneter Lösungsweg funktionieren könnte. Durch Nichts-Tun kommt man keinen Schritt weiter in Richtung einer Lösung.

Besonders das Probieren ist hierbei von großer Wichtigkeit. Dabei muss man jedoch leider sagen, dass das Probieren im Mathematikunterricht oftmals grundsätzlich als verpönt vermittelt wird. Auch wenn bei Routineaufgaben der Lösungsweg praktisch vorgegeben ist, sollten Schülerinnen und Schüler, die ihr Ergebnis auf andere Arten herausbekommen haben und dieses begründen können, sogar darin bestärkt werden. Oftmals können durch das Probieren Strategien und Lösungswege gefunden werden. Gerade Schülerinnen und Schüler, die Lösungsverfahren nicht strikt auswendig lernen wollen, sollten die Möglichkeit haben, sich eine eigene Strategie zurechtlegen zu können.

Probieren hilft zudem dabei, sich ein ungefähres Bild über die Größenordnung des Ergebnisses zu machen oder das erhaltene Ergebnis grob überprüfen zu können.

9.3.2 Auf- und einzeichnen

Ob Skizzen oder informative Figuren, Lösungsgraphen oder Tabellen – visuellen Lerntypen kann das Lösen einer Aufgabe dadurch erleichtert werden, dass sie sich selbst etwas aufzeichnen.

Bei der Befragung gab es bei einigen Aufgaben visuelle Lösungsansätze von Schülerinnen und Schülern. Bei der Palindrom-Aufgabe überlegten sich einige, wie Palindrome aufgebaut sind und haben dies mit Hilfe der Unterstriche aufgezeichnet, die als Platzhalter für einzelne Ziffern fungierten. Diese Methode scheint für diese Schülerinnen und Schüler einfacher als beispielsweise die Symbolisierung mit Hilfe von Variablen (beispielsweise „xyyx“ bei vierstelligen Palindromen).

Ein paar Schülerinnen und Schülern fiel es leicht, Aufgabe 7 mit Hilfe einer informativen Figur, wie beispielhaft jener in Abbildung 33, zu lösen. Dabei wurde die Aufgabenstellung visualisiert und auch die Eigenschaft der natürlichen Zahlen, dass sich gerade und ungerade abwechseln, eingezeichnet. Dadurch ergab sich schnell, dass eine der beiden Primzahlen eine gerade Zahl sein müsste.

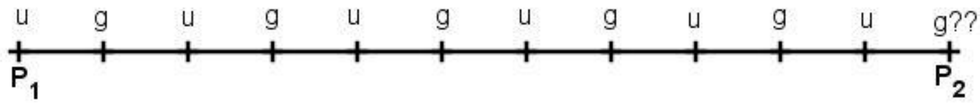


Abbildung 33: Visualisierung zu Aufgabe 7

Die Aufgaben 3 und 6 konnten auch durch Einzeichnen einfach gelöst werden, indem man das Dreieck zum Parallelogramm ergänzte beziehungsweise die Dreiecksflächen zerteilte und verschob oder vergrößerte. Diese Lösungsmethoden wählten einige Schülerinnen und Schüler, während andere die Berechnung bevorzugten. Auf diese Weise konnte jede und jeder den ihr oder ihm besser liegenden Lösungsweg wählen.

Seltener wurden auch jene Formen, die als nicht maßgetreue Skizze zur Angabe hinzugefügt waren, konstruiert, um durch Messen eine Idee zu erhalten, in welcher Größenordnung das Ergebnis sein müsste, oder um eine Idee zur Lösung zu bekommen. Diese Methode entspricht einer Mischung aus Aufzeichnen und Probieren und verhalf einzelnen Schülerinnen und Schülern auch zu einer Lösung.

9.4 Hilfestellungen der Lehrperson

Pólya vertritt die Meinung, dass die Lehrperson den Schülerinnen und Schülern im Unterricht helfen sollte, indem sie geeignete Fragen stellt. Diese Fragen sollten nicht zu konkret sein, sondern eher allgemein formuliert, sodass sie auf mehrere Probleme anwendbar sind und nicht nur auf das eine eben bearbeitete abzielen. Die Frage, ob die Schülerin oder der Schüler ähnliche Aufgaben schon gesehen hätte und wüsste, wie man sie lösen könne, sind sinnvoller als konkrete Hilfestellungen, Hinweise zu bestimmten mathematischen Sätzen oder Lösungswegen. Zudem sollten es Fragen sein, die den Problemlösenden eigentlich auch selbst hätten einfallen können. (Pólya, 1949, S. 34ff)

Bruder und Collet geben ein Unterrichtskonzept zum Problemlösen-Lernen an, wobei die Lehrperson zuerst die Schülerinnen und Schüler an Heurismen gewöhnen, anhand guter

Beispiele gewisse Heurismen und deren Wirksamkeit vermitteln, Zeit für Übung und Anwendung geben und schließlich die unterbewusste Anwendung von Heurismen fördern soll. Dies geschieht auch, wie bei Pólya, häufig durch Fragen. Besonders zu Beginn des Problemlösen-Lernens geben Bruder und Collet Fragestellungen an, die den Schülerinnen und Schülern beim Problemlösen-Lernen helfen und die sie sich auch selbst dabei stellen können. Schlussendlich sollen die Schülerinnen und Schüler ihr eigenes Modell entwickeln. (Bruder & Collet, 2011, S. 112ff)

Zech nennt im Zusammenhang mit dem Problemlösen-Lernen das Prinzip der „minimalen Hilfe“. Er kategorisiert verschiedene Hilfestellungen. Von der geringsten Hilfe, indem man die Schülerinnen und Schüler bestärkt und motiviert, über Rückmeldungshilfen, bei denen sie nur eine Information bekommen, ob der aktuelle Lösungsversuch zielführend ist oder das Ergebnis stimmen kann, strategischen Hilfen, die auf verschiedene Heurismen hinweisen, die benutzt werden können, bis hin zu inhaltlichen Hilfen, die als stärkste Hilfen gelten. (Zech, 2002, S. 315ff)

9.5 Problemlöseaufgaben

In der Literatur werden Problemlöseaufgaben auf verschiedene Arten definiert und kategorisiert. Pólya unterscheidet beispielsweise zwischen Bestimmungs- und Beweisaufgabe, andere nennen als wichtigste Eigenschaft einer Problemlöseaufgabe ihre Offenheit. In der Befragung waren zudem ein paar Aufgaben zu finden, die man umgangssprachlich „Knobelaufgaben“ nennt. Wie auch immer sie bezeichnet und definiert sind, können Probleme in unterschiedlichsten Varianten im Unterricht vorkommen. Wenn man Problemlösen im Unterricht speziell für Begabte und Interessierte anwenden möchte, so gibt es die Möglichkeit, eine Zusatzaufgabe zu einer im Unterricht behandelten Aufgabe zu stellen, in der beispielsweise ein Beweis oder eine allgemeine Formulierung verlangt wird. Zudem können zusätzliche Aufgaben, die über den Schulstoff hinausgehen, gestellt werden, um Begabte und Interessierte im Mathematikunterricht fördern und fordern zu können.

Leuders (2001, S. 118ff) betont die Wichtigkeit von Problemlösen im Unterricht und gibt konkrete Möglichkeit zur Öffnung von Aufgaben an. Dabei kommt es nicht darauf an, möglichst kreative und ungewöhnliche Aufgaben zu finden, sondern übliche Schulbuchaufgaben so abzuändern, dass sie mehrere Lösungswege zulassen. Außerdem können Eingangsinformationen oder die Fragestellung geändert werden. Es kann durchaus sein, dass

Schülerinnen und Schüler selbst durch Recherche oder Schätzung einige benötigte Daten ermitteln sollen.

Nicht nur in der Literatur wird immer wieder darauf hingewiesen, auch bei der Befragung zeigte sich, dass der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht nur ausschlaggebend für die Häufigkeit einer korrekten Lösung, sondern auch für die Beliebtheit der Aufgabe verantwortlich sein kann. Dabei ist zu betonen, dass diese Einschätzung stets individuell ist und keine Verallgemeinerung gemacht werden darf: Es gibt Schülerinnen und Schüler, die eine Aufgabe als interessant empfinden, wenn sie lange knobeln müssen, jedoch handelte es sich dabei eher um sehr geübte Problemlöserinnen und Problemlöser. Großteils demotivieren jedoch zu schwierige Aufgaben. Daher sollte darauf geachtet werden, dass die Aufgabe durchaus gelöst werden kann, jedoch auch nicht zu trivial ist.

Ebenso ist es wichtig, den Schülerinnen und Schülern ein Aha-Erlebnis oder einen Heureka-Moment, wie er bei Bruder und Collet (2011) bezeichnet wird, zu ermöglichen. Dazu muss nicht nur sichergestellt werden, dass sie tatsächlich selbst eine Aufgabe bearbeiten können, sondern auch die Aufgabe so gestellt sein, dass sie einen Moment der Erkenntnis zulässt. Insbesondere bei Routineaufgaben hält sich dieser Heureka-Effekt in Grenzen. Auch Problemlöseaufgaben, die in ähnlicher Form schon mehrmals gelöst wurden, entsprechen in diesem Fall schon fast Routineaufgaben. Daher ist es wichtig, auch innerhalb der Problemlöseaufgaben zu variieren und eine möglichst große Abwechslung zu bieten.

Diese Bedeutung der Vielseitigkeit von Aufgaben war in der Befragung vor allem daran erkennbar, dass jede Aufgabe mehrmals bei den Befragten sowohl als beliebteste als auch als unbeliebteste angegeben wurde. Dies macht erneut deutlich, wie individuell das Empfinden ist und wie wichtig daher die Vielfalt der Aufgaben ist.

Bei der Befragung gab es auch Unterschiede darin, ob die Befragten eine Aufgabe mochten, weil sie Spaß machte oder weil sie sie herausforderte. Gerade jene Schülerinnen und Schüler, die sehr viele Aufgaben lösen konnten, fanden Gefallen an den schwierigeren Aufgaben, in denen sie eine Herausforderung sahen. Jenen mit weniger gelösten Aufgaben gefielen diejenigen Aufgaben, die sie einfacher bearbeiten konnten, am besten. Sie hatten dabei ein Erfolgserlebnis, während sich die anderen erst bei den schwierigeren Aufgaben ein Aha-Erlebnis erhofften, da die einfacheren Aufgaben für sie „zu einfach" schienen oder sie sie zumindest durch Übung im Problemlösen ohne viel Knobelei lösen konnten.

Büchter und Leuders (2009, S. 78ff) geben einige Kriterien an, die bei Problemlöseaufgaben im Unterricht verhindert werden müssen. Man sollte nicht Aufgaben als echte Anwendung ausgeben, wenn es sich nur um eine „Pseudoeinkleidung in reale Kontexte" handlet sowie scheinoffene Aufgaben stellen, die in Wahrheit nur einen Lösungsweg erlauben, beziehungsweise wofür „eine ganz besondere, (fast) nur für diese Aufgabe einsetzbare Strategie benötigt wird" (Büchter & Leuders, 2009, S. 79). Bei Problemlöseaufgaben ist es also wichtig, den Schülerinnen und Schülern tatsächlich die Möglichkeit zu geben, ihren eigenen Ansatz aufzustellen und mit ihren Ideen und Strategien selbst zu einer Lösung zu kommen.

10 Conclusio

Die Befragung der Schülerinnen und Schüler zeigte, dass es durchaus sinnvoll, wenn nicht ja sogar notwendig ist, im Unterricht mehr Wert auf die Förderung von Begabten und Interessierten zu legen, um sie nicht zu unterfordern und in der Folge zu demotivieren. In dieser Diplomarbeit wurde aufgezeigt, dass Problemlösen eine gute der sicherlich zahlreichen Möglichkeiten dafür ist.

Problemlösen sollte aber für alle Schülerinnen und Schüler ein zentraler Bestandteil des Mathematikunterrichts darstellen, was auch in der Formulierung der erforderlichen Kompetenzen für Mathematik in den Bildungsstandards insbesondere in Hinblick auf die zentrale kompetenzorientierte Reifeprüfung besonders hervorgehoben wird. Zudem schnitt Österreich auch bei Schulleistungsuntersuchungen wie dem PISA-Test, der unter anderem auch die Problemlösefähigkeit testet, immer wieder weniger gut ab. Somit ergibt sich eine allgemeine Dringlichkeit, Problemlösen im Mathematikunterricht vermehrt zu vermitteln.

Jedoch kann Problemlösen im Sinne der Individualisierung jede und jeden Einzelne(n) fördern, wenn eigenständiges Arbeiten auf dem individuellen Niveau gefördert wird. Insbesondere stellt es dadurch eine geeignete Form der Begabtenförderung im Unterricht dar.

In der Befragung hat sich herausgestellt, dass es wichtig ist, eine Vielfalt an Aufgaben bereitzustellen, um auf die verschiedenen Stärken und Interessen der Schülerinnen und Schüler einzugehen und diese zu fördern. Dies erhöht nicht nur die Freude am Fach Mathematik, sondern ermöglicht auch das Erleben von Aha-Erlebnissen, die wiederum die Schülerinnen und Schüler motivieren. Und wenn man möglichst viele Schülerinnen und Schüler auf diese oder auch andere Weise im Unterricht motivieren konnte, so darf man darauf hoffen, dass sich ein häufig zitiertes Sprichwort als zutreffend erweist: „Was man gern macht, macht man gut.“

11 Verzeichnisse

11.1 Quellenverzeichnis

25th Mathematical Duel: Category A - individual competition, Aufgabe 1. (8. März 2017). Graz.

25th Mathematical Duel: Category C - individual competition, Aufgabe 4. (8. März 2017). Graz.

BIFIE (Hrsg.). (2011). *Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe: Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung. Teil 1.* Graz: Leykam.

BIFIE. (online). *Bildungsstandards*. Abgerufen am 24. Februar 2017 von https://www.bifie.at/bildungsstandards

BIFIE (Hrsg.). (online). *Bildungsstandards für Mathematik, 4. Schulstufe.* Abgerufen am 24. Februar 2017 von https://www.bifie.at/system/files/dl/Deskriptoren_BiSt_M4.pdf

BIFIE (Hrsg.). (online). *Bildungsstandards für Mathematik, 8. Schulstufe.* Abgerufen am 24. Februar 2017 von https://www.bifie.at/node/1347

Bikner-Ahsbahs, A. (1999). *Mathematikinteresse: Eine Studie mit mathematisch interessierten Schülerinnen und Schülern.* Hildesheim: Franzbecker.

Borromeo Ferri, R., Kaiser, G. & Greefrath, G. (Hrsg.). (2013). *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule: Theoretische und didaktische Hintergründe.* Wiesbaden: Springer.

Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen.

Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (Hrsg.). (2015). *Handbuch der Mathematikdidaktik.* Berlin: Springer.

Büchter, A. & Leuders, T. (2009). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln: Lernen fördern - Leistung überprüfen* (4. Aufl.). Berlin: Cornelsen.

Bundesministerium für Bildung. (online). Abgerufen am 22. Februar 2017 von Grundsatzerlass zur Begabtenförderung: https://www.bmb.gv.at/ministerium/rs/2009_16.html

Dambeck, H. (online). *Motivation ist wichtiger als Intelligenz*. Abgerufen am 23. Februar 2017 von Spiegel online: http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/erfolg-in-mathe-motivation-ist-wichtiger-als-intelligenz-a-878609.html

Deci, E. (1992). The Relation of Interest to the Motivation of Behaviour: A Self-Determination Theory Perspective. In R. K. A., S. Hidi & A. Krapp (Hrsg.), *The Role of Interest in Learning and Development.* Lawrence Erlbaum Associates. Abgerufen am 2017. April 12 von https://www.researchgate.net/publication/232512697_The_relation_of_interest_to_the_motivation_of_behavior_A_self-determination_theory_perspective

Deci, E. & Ryan, R. (1993). Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. *Zeitschrift für Pädagogik 39, 2*, S. 223-238. Abgerufen am 12. April 2017 von https://www.phil-fak.uni-duesseldorf.de/fileadmin/Redaktion/Institute/Allgemeine_Sprachwissenschaft/Dokumente/Bilder/1993_DeciRyan_DieSelbstbestimmungstheoriederMotivation-German.pdf

Denk, F. (1964). Bedeutung des Mathematikunterrichts für die heuristische Erziehung. *Der Mathematikunterricht. Jahrgang 10. Heft 1*, S. 36-57.

Duden. (online). Abgerufen am 16. Februar 2017 von http://www.duden.de/rechtschreibung/heureka

Fast, M., Gerber, A., Haberfellner, C., Koth, M., Langer, R., Nösterer, F., . . . Spiel, K. (2013). *Themenheft Mathematik "Problemlösen": Volksschule Grundstufe I + II.* (Bifie, Hrsg.) Graz: Leykam. Abgerufen am 15. April 2017 von https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_ma_themenheft_problemloesen_2013-05-16.pdf

Friedrich, M. H. (2008). *Lebensraum Schule.* Wien: Ueberreuter.

Gute Zitate. (online). Abgerufen am 15. April 2017 von http://gutezitate.com/zitat/153009

Hemme, H. (1994). *Die Sphinx: 93 mathematische Rätsel mit ausführlichen Lösungen.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Hemme, H. (2003). *Mathematik zum Frühstück* (2. Aufl.). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Hemme, H. (2013). *Das große Buch der mathematischen Rätsel.* Köln: Anaconda.

Hölken, R. (2011). *Einfache Würfelspiele für den Mathematikunterricht.* Buxtehude: Persen. Abgerufen am 15. April 2017 von https://books.google.at/books?id=sT6PNsk2B2oC&pg=PA34&dq=h%C3%B6lken+ruth+w%C3%BCrfelspiele+1000er-Grenze&hl=de&sa=X&ved=0ahUKEwiu3Y2FuJ7TAhVHYJoKHU7dB6wQ6AEIJTAA#v=onepage&q=h%C3%B6lken%20ruth%20w%C3%BCrfelspiele%201000er-Grenze&f=false

Känguru der Mathematik Deutschland. (online). Abgerufen am 23. Februar 2017 von http://www.mathe-kaenguru.de/international/index.html

Känguru der Mathematik Österreich. (online). Abgerufen am 15. Februar 2017 von Aufgaben der Vorjahre: 2004 Junior: http://www.kaenguru.at/zum-herunterladen/aufgaben-der-vorjahre/2004/

Krbek, M. v. (1971). *Geometrische Plaudereien* (3. Aufl.). Leipzig: BSB B. G. Teubner.

Leuders, T. (2001). *Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II.* Berlin: Cornelsen.

Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B. & Ulovec, A. (2013). *Mathematik verstehen 5.* Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch.

Malle, G., Ramharter, E., Ulovec, A. & Kandl, S. (2005). *Mathematik verstehen 5.* Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch.

Mania, H. (2008). *Gauß: Eine Biografie.* Hamburg: Rowohlt Taschenbuch.

Maslanka, C. (1990). *The Guardian Book of Puzzles.* London: Guardian News Services.

Mathematical Duel. (online). Abgerufen am 23. Februar 2017 von http://www.mathematicalduel.eu/

Muth-von Hinten, B. (online). *Problemlösen.* Abgerufen am 24. Februar 2017 von Didaktik der Mathematik, Universität Würzburg: http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/10040500/dokumente/Texte_zu_Grundfragen/muth_probleml oesen.pdf

Österreichische Mathematik Olympiade - ÖMO. (online). Abgerufen am 23. Februar 2017 von http://www.oemo.at/

Österreichisches Zentrum für Begabtenförderung und Begabtenforschung. (online). Abgerufen am 22. Februar 2017 von http://www.oezbf.net/cms/index.php/1216.html

Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens.* (E. Behnke, Übers.) Bern: A. Francke.

Pólya, G. (1964). Die Heuristik. Versuch einer vernünftigen Zielsetzung. *Der Mathematikunterricht. Jahrgang 10. Heft 1*, S. 5-15.

Pólya, G. (1966). *Vom Lösen mathematischer Aufgaben: Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren* (Bd. I). (L. Bechtolsheim, Übers.) Basel: Birkhäuser.

Pólya, G. (1967). *Vom Lösen mathematischer Aufgaben: Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren* (Bd. II). Basel: Birkhäuser.

Posamentier, A. (1990). *Eine vernachlässigte Kunst: Motivation im Mathematikunterricht.* Abgerufen am 23. Februar 2017 von Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG): http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/

Rechtsinformationssystem des Bundeskanzleramts. (online). Abgerufen am 22. Februar 2017 von https://www.ris.bka.gv.at/

Ullrich, H. & Strunck, S. (Hrsg.). (2008). *Begabtenförderung an Gymnasien: Entwicklungen, Befunde, Perspektiven.* Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften.

Wettbewerb Mathematical Duel. (1994).

Wild, K. & Krapp, A. (1995). Elternhaus und intrinsische Lernmotivation. *Zeitschrift für Pädagogik 41, 4*, S. 579-595. Abgerufen am 15. April 2017 von http://www.pedocs.de/volltexte/2015/10516/pdf/ZfPaed_1995_4_Wild_Krapp_Elternhaus_und_intrinsische_Lernmotivation.pdf

Zech, F. (2002). *Grundkurs Mathematikdidaktik: Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik* (10. Aufl.). Weinheim und Basel: Beltz.

11.2 Abbildungsverzeichnis

12 Anhänge

12.1 Fragebögen/Aufgaben: alle Angaben

Fragebogen Gruppe α:

Ich besuche den Mathematik-Olympiade-Kurs seit…	◯ diesem Schuljahr	◯ ca. 1-2 Jahren	◯ ca. 3-4 Jahren	◯ >5 Jahren

Zutreffendes bitte ankreuzen!	Stimme sehr zu	Stimme eher zu	Stimme eher nicht zu	Stimme gar nicht zu
Ich gehe gerne in den Mathematik-Olympiade-Kurs.	◯	◯	◯	◯
Mich interessieren die Inhalte, die wir im Kurs lernen.	◯	◯	◯	◯
Mathematik zählt zu meinen Lieblingsfächern in der Schule.	◯	◯	◯	◯
Ich bin vor Mathematik-Schularbeiten nervös.	◯	◯	◯	◯
Ich bin vor Mathematik-Wettbewerben nervös.	◯	◯	◯	◯
Ich mag Aufgaben, bei denen ich rätseln / knobeln / überlegen muss.	◯	◯	◯	◯
Mein(e) MathematiklehrerIn fördert begabte und interessierte SchülerInnen.	◯	◯	◯	◯
Mein(e) MathematiklehrerIn SOLLTE öfter begabte und interessierte SchülerInnen fördern.	◯	◯	◯	◯
Ich zähle mich zu diesen begabten oder interessierten SchülerInnen.	◯	◯	◯	◯
Mich interessiert Mathematik grundsätzlich (nicht nur das Schulfach).	◯	◯	◯	◯

Zutreffendes bitte ankreuzen!	Sehr oft	oft	selten	nie
Ich beschäftige mich in meiner Freizeit mit mathematischen Problemen, Aufgaben, Inhalten etc.	◯	◯	◯	◯
Ich fühle mich im Mathematikunterricht unterfordert.	◯	◯	◯	◯

Fragebogen Gruppe β:

Ich besuche keinen Mathematik-Olympiade-Kurs, weil...	◯ kein Interesse / keine Lust	◯ keine Zeit	◯ es wird kein Kurs angeboten	◯ andere Gründe

Zutreffendes bitte ankreuzen!	Stimme sehr zu	Stimme eher zu	Stimme eher nicht zu	Stimme gar nicht zu
Der Gedanken an eine Teilnahme an mathematischen Wettbewerben bereitet mir Unbehagen.	◯	◯	◯	◯
Ich würde gerne (öfter/einmal) an mathematischen Wettbewerben teilnehmen.	◯	◯	◯	◯
Mathematik zählt zu meinen Lieblingsfächern in der Schule.	◯	◯	◯	◯
Ich bin vor Mathematik-Schularbeiten nervös.	◯	◯	◯	◯
Ich bin vor Mathematik-Wettbewerben nervös. (Falls noch nie an einem M-Wettbewerb wie z.B. Känguru-Test teilgenommen: nichts ankreuzen.)	◯	◯	◯	◯
Ich mag Aufgaben, bei denen ich rätseln / knobeln / überlegen muss.	◯	◯	◯	◯
Mein(e) MathematiklehrerIn fördert begabte und interessierte SchülerInnen.	◯	◯	◯	◯
Mein(e) MathematiklehrerIn SOLLTE öfter begabte und interessierte SchülerInnen fördern.	◯	◯	◯	◯
Ich zähle mich zu diesen begabten oder interessierten SchülerInnen.	◯	◯	◯	◯
Mich interessiert Mathematik grundsätzlich (nicht nur das Schulfach).	◯	◯	◯	◯

Zutreffendes bitte ankreuzen!	Sehr oft	oft	selten	nie
Ich beschäftige mich in meiner Freizeit mit mathematischen Problemen, Aufgaben, Inhalten etc.	◯	◯	◯	◯
Ich fühle mich im Mathematikunterricht unterfordert.	◯	◯	◯	◯

Schriftlicher Teil:

Aufgabe 1:

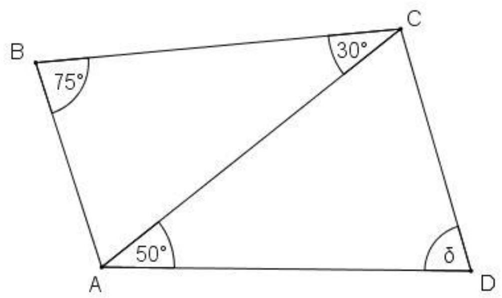
Du hast genau 2 Minuten Zeit, um folgende Multiplikation auszuführen:

$$81624324048566472808 \cdot 12{,}5 =$$

Aufgabe 2:

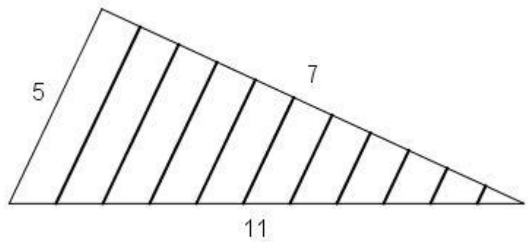
Im Viereck ABCD gilt AD = BC (das sind die Längen der Seiten). Einige Winkel sind in der folgenden Abbildung eingezeichnet. Wie groß ist der Winkel δ? Begründe Deine Antwort!

(Messen ist kein gültiger Lösungsweg)



Aufgabe 3:

In einem Dreieck mit den Seitenlängen 11, 7 und 5 Zentimeter sind 10 Linien eingezeichnet, die alle parallel zur kürzesten Dreiecksseite verlaufen und die das Dreieck in 11 gleich breite Streifen zerteilen. Wie groß ist die Gesamtlänge dieser eingezeichneten Linien?



Aufgabe 4:

Gib eine Methode an, wie man ein beliebiges Quadrat in 29 kleinere (nicht notwendigerweise gleich große) Quadrate zerteilen kann.

Zusatzfrage: Finde eine Möglichkeit, das Quadrat in 29 kleinere Quadrate zu zerteilen, sodass möglichst viele der entstandenen Quadrate gleich groß sind.

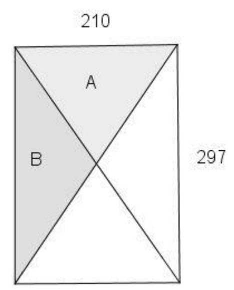
Aufgabe 5:

Ein Palindrom ist ein Wort, das man nicht nur wie gewöhnlich von links nach rechts lesen kann, sondern auch von rechts nach links, ohne dass sich sein Sinn dabei ändert, wie zum Beispiel bei den Wörtern „Ebbe“, „Madam“ ode
Zahlen Palindrome, wie zum Beispiel 1991.
Wie viele (ganzzahlige) Palindrome gibt es, die größer als 0 und kleiner als 10000 sind (wobei die Zahl nicht mit „0“ beginnen darf, wie zu

Zusatzfrage: Wie viele Palindrome gibt es, die kleiner als 10^n sind, wobei n eine beliebige positive ganze Zahl sein soll?

Aufgabe 6:

Ein DIN-A4-Blatt, dessen Seiten 297 und 210 Millimeter lang sind, wird entlang seiner beiden Diagonalen geknickt. Es entstehen dabei vier Dreiecke.
Wie groß ist das Verhältnis der Flächen des spitzwinkeligen Dreiecks (A) und des stumpfwinkeligen Dreiecks (B)?



Zusatzfrage: Gibt es Rechtecke, bei denen dieses oben beschriebene Verhältnis ein anderes ist? Begründe Deine Antwort.

Zutreffendes bitte ankreuzen!

Ich habe Aufgabe 2 bearbeitet.	◯ ja		◯ nein	
Falls NEIN: Warum nicht?	◯ keine Zeit	◯ verstehe die Aufgabe nicht	◯ anderer Grund: ___________________	
Falls JA: Wie gut hast Du Deiner Meinung nach die Aufgabe gelöst?	◯ sehr gut (sicher richtig)	◯ eher gut	◯ eher nicht gut	◯ schlecht (sicher falsch)
Falls JA: Wie schwierig war die Aufgabe für dich?	◯ sehr einfach	◯ eher einfach	◯ eher schwierig	◯ sehr schwierig
Ich habe Aufgabe 3 bearbeitet.	◯ ja		◯ nein	
Falls NEIN: Warum nicht?	◯ keine Zeit	◯ verstehe die Aufgabe nicht	◯ anderer Grund: ___________________	
Falls JA: Wie gut hast Du die Aufgabe gelöst?	◯ sehr gut (sicher richtig)	◯ eher gut	◯ eher nicht gut	◯ schlecht (sicher falsch)
Falls JA: Wie schwierig war die Aufgabe für dich?	◯ sehr einfach	◯ eher einfach	◯ eher schwierig	◯ sehr schwierig
Ich habe Aufgabe 4 bearbeitet.	◯ ja		◯ nein	
Falls NEIN: Warum nicht?	◯ keine Zeit	◯ verstehe die Aufgabe nicht	◯ anderer Grund: ___________________	
Falls JA: Wie gut hast Du Deiner Meinung nach die Aufgabe gelöst?	◯ sehr gut (sicher richtig)	◯ eher gut	◯ eher nicht gut	◯ schlecht (sicher falsch)
Falls JA: Wie schwierig war die Aufgabe für dich?	◯ sehr einfach	◯ eher einfach	◯ eher schwierig	◯ sehr schwierig
Ich habe Aufgabe 5 bearbeitet.	◯ ja		◯ nein	
Falls NEIN: Warum nicht?	◯ keine Zeit	◯ verstehe die Aufgabe nicht	◯ anderer Grund: ___________________	
Falls JA: Wie gut hast Du Deiner Meinung nach die Aufgabe gelöst?	◯ sehr gut (sicher richtig)	◯ eher gut	◯ eher nicht gut	◯ schlecht (sicher falsch)
Falls JA: Wie schwer war die Aufgabe für dich?	◯ sehr einfach	◯ eher einfach	◯ eher schwierig	◯ sehr schwierig
Ich habe Aufgabe 6 bearbeitet.	◯ ja		◯ nein	
Falls NEIN: Warum nicht?	◯ keine Zeit	◯ verstehe die Aufgabe nicht	◯ anderer Grund: ___________________	
Falls JA: Wie gut hast Du Deiner Meinung nach die Aufgabe gelöst?	◯ sehr gut (sicher richtig)	◯ eher gut	◯ eher nicht gut	◯ schlecht (sicher falsch)
Falls JA: Wie schwierig war die Aufgabe für dich?	◯ sehr einfach	◯ eher einfach	◯ eher schwierig	◯ sehr schwierig

Welche Aufgabe hat Dir besonders gut (und welche nicht gut) gefallen und warum (nicht)?

Mündlicher Teil:

Aufgabe 7:

Auf dem Zahlenstrahl liegen zwischen den beiden Primzahlen 23 und 29 genau fünf andere Zahlen, die alle keine Primzahlen sind. Sie sind das kleinste Primzahlenpaar mit dieser Eigenschaft, das nächstgrößere Paar sind 31 und 37.
Gibt es zwei Primzahlen, zwischen denen auf dem Zahlenstrahl genau zehn Zahlen liegen, die wiederum keine Primzahlen sind? Falls ja: Finde das kleinste Primzahlenpaar, für das dies gilt.
Begründe Deine Antwort!

Aufgabe 8:

Diese Aufgabe wird mündlich erklärt.

1. Durchgang:

2. Durchgang:

3. Durchgang:

****

Nach dem Bearbeiten der Aufgaben: **Zutreffendes bitte ankreuzen!**

Wie gut hast Du Deiner Meinung nach Aufgabe 7 gelöst?	○ sehr gut (sicher richtig)	○ eher gut	○ eher nicht gut	○ schlecht (sicher falsch)
Wie schwierig war die Aufgabe für Dich?	○ sehr einfach	○ eher einfach	○ eher schwierig	○ sehr schwierig
Wie gut hast Du Deiner Meinung nach Aufgabe 8 gelöst?	○ sehr gut (sicher richtig)	○ eher gut	○ eher nicht gut	○ schlecht (sicher falsch)
Wie schwierig war Aufgabe 8 für Dich?	○ sehr einfach	○ eher einfach	○ eher schwierig	○ sehr schwierig

12.2 Auswertungs-Tabellen

Gruppe α: Auswertung

	Fragebogen												
	Mathematik-Olympiade-Kurs seit	gehe gern in M.-O.-Kurs	interess. Inhalte	Mathe Liebl. Fächer	nervös vor M-Schularbeiten	nervös vor M-Wettb.	mag rätseln/ knobeln	M-LehrerIn fördert	M-LehrerIn sollte öfter fördern	zähle mich zu Beg./Interess.	grunds. Interesse an Mathematik	Freizeit Mathe	im Mathematik-unterr. unterfordert
A1	4	1	1	1	4	3	1	3	2	1	1	2	1
A2	3	1	1	1	4	4	1	3	2	1	1	2	1
A3	4	2	2	1	4	3	1	3	1	2	2	2	2
A4	3	2	2	1	4	4	1	3	1	1	1	4	2
A5	3	1	1	1	3	2	1	2	3	2	1	3	2
A6	3	1	1	1	4	3	1	2	2	2	1	2	2
A7	4	1	1	1	4	4	1	1	2	1	1	3	2
A8	4	1	1	1	4	3	1	1	3	1	2	3	3
B1	2	2	1	2	4	3	1	2	3	2	1	2	2
B2	4	2	1	1	4	3	1	1	4	1	1	2	2
B3	3	1	1	2	4	2	1	4	2	2	1	1	1
B4	3	1	1	1	3	1	2	3	3	2	1	2	2
B5	1	1	2	1	3	2	1	3	3	1	1	2	2
B6	3	1	1	1	3	2	1	3	1	1	1	2	1
B7	3	2	1	1	3	2	1	3	2	2	1	2	1
B8	3	1	1	1	4	3	2	3	1	1	1	2	2
C1	3	1	1	1	4	3	1	3	1	1	2	3	1
C2	3	1	1	3	4	2	1	3	3	2	2	3	1
C3	2	1	1	2	1	1	1	2	1	2	1	2	1
C4	3	1	1	1	4	4	1	4	1	1	4	2	1
C5	2	1	1	1	3	3	1	1	4	3	1	3	2
C6	2	2	2	2	1	3	1	1	3	3	2	3	2
C7	1	2	1	2	3	2	2	3	1	1	2	3	1
C8	3	2	1	1	2	2	1	3	2	2	1	3	2
Anzahl Antwort 1	2	16	20	18	2	2	21	5	8	12	17	1	10
Anzahl Antwort 2	4	8	4	5	1	8	3	4	7	10	6	13	13
Anzahl Antwort 3	13	0	0	1	7	10	0	13	7	2	0	9	1
Anzahl Antwort 4	5	0	0	0	14	4	0	2	2	0	1	1	0

in diesem Bereich bedeutet:
1) stimme sehr zu bzw. sehr oft; 2) stimme eher zu bzw. oft;
3) stimme eher nicht zu bzw. selten; 4) stimme gar nicht zu bzw. nie

Gruppe α: Auswertung

	Aufgabe 1		Aufgabe 2			Aufgabe 3				Aufgabe 4				
	Trick	korrekt gelöst	korrekt gelöst	gut gelöst	wie schwierig	korrekt gelöst	gut gelöst	wie schwierig	warum nicht bearbeitet	korrekt gelöst	Zusatzfrage korrekt	gut gelöst	wie schwierig	warum nicht bearbeitet
A1	a	**0,5**	**1**	1	1	**1**	1	1		**1**	1	1	2	
A2	1	**1**	**1**	1	1	**1**	1	1		**1**	1	1	2	
A3	1	**1**	**1**	1	1	**1**	1	1		**1**	0	2	2	
A4	1	**0,5**	**1**	1	1	**1**	1	1		**1**	1	1	2	
A5	0	**0**	**0**	3	k.A.	**0**			Zeit	**1**		2	2	
A6	0	**0**	**1**	1	2	**0**	2	3		**0**				Zeit
A7	0	**0**	**1**	1	1	**1**	1	2		**1**	1	1	3	
A8	0	**0**	**1**	1	1	**0**	1	1		**0**				Zeit
B1	0	**0**	**1**	1	1	**1**	1	2		**1**	0	1	2	
B2	a	**0**	**1**	1	1	**1**	2	2		**1**	1	1	1	
B3	0	**0**	**1**	1	1	**1**	2	3		**0**				Zeit
B4	1	**0,5**	**1**	1	1	**1**	2	2		**1**		2	3	
B5	0	**0**	**1**	1	1	**1**	2	2		**0**				And.
B6	0	**0**	**1**	1	2	**1**	2	2		**0**		3	3	
B7	0	**0**	**1**	1	1	**1**	1	2		**1**		2	2	
B8	0	**0**	**1**	1	2	**0**			And.	**0**		3	4	
C1	0	**0**	**1**	3	3	**0**	4	4		**0**		3	3	
C2	0	**0**	**1**	1	1	**1**	3	3		**0**		4	3	
C3	0	**0**	**0**	4	k.A.	**0**			Zeit	**0**				And.
C4	0	**0**	**0**	3	3	**1**	1	1		**1**		2	2	
C5	0	**0**	**1**	2	2	**1**	2	2						Ver.
C6	0	**0**	**1**	2	2	**1**	2	2		**0**		4	4	
C7	0	**0**	**1**	2	1	**0**	4	4		**0**		4	3	
C8	0	**0**	**1**	2	3	**1**	3	3		**1**		1	1	
Anzahl "1":	4	**2**	**21**			**17**				**12**	**5**			
Anzahl "0":	18	**19**	**3**			**7**				**11**	**2**			
Anzahhl "0,5":		**3**	**Anzahl 1:**	16	14	**Anzahl 1:**	9	6		**Anzahl 1:**		7	2	
Anzahl "a":	2		**Anzahl 2:**	4	5	**Anzahl 2:**	8	9		**Anzahl 2:**		5	8	
			Anzahl 3:	3	3	**Anzahl 3:**	2	4		**Anzahl 3:**		3	6	
			Anzahl 4:	1	0	**Anzahl 4:**	2	2		**Anzahl 4:**		3	2	

in der Auswertung: 0) nein / nicht gelöst; 1) ja / gelöst

Gruppe α: Auswertung

	Aufgabe 5						Aufgabe 6						
	probieren / zählen	systematisch	**korrekt gelöst**	Zusatzfrage gelöst	gut gelöst	wie schwierig	**korrekt gelöst**	Zusatzfrage gelöst	gut gelöst	wie schwierig	warum nicht bearbeitet		***Richtige Aufgaben im schriftlichen Teil***
A1		1	**1**	1	1	2	**1**	1	1	1			***5,5***
A2		1	**0**	0	1	2	**1**	1	1	1			***5***
A3		1	**0**	0	2	2	**1**	1	1	1			***5***
A4		1	**0**	0	1	2	**1**	1	1	1			***4,5***
A5	1		**1**		3	2	**1**	0	4	3			***3***
A6		1	**1**	1	2	3	**1**	1	2	3			***3***
A7	1	1	**0**	0	1	3	**1**	1	1	3			***4***
A8		1	**1**	0	2	2					z		***2***
B1	1	1	**1**	1	1	2	**1**	1	1	1			***5***
B2		1	**1**	1	2	3	**1**	1	1	2			***5***
B3		1	**1**	0	2	3	**1**	1	2	2			***4***
B4		1	**1**	1	2	1	**1**	1	1	1			***5,5***
B5		1	**1**	0	2	3	**1**	1	1	1			***4***
B6	1	1	**0**		2	2	**1**	1	1	2			***3***
B7		1	**0**		2	1	**1**	1	1	1			***4***
B8		1	**0**		2	2	**1**	1	1	2			***2***
C1	1		**0**		2	2	**1**	1	1	1			***2***
C2		1	**1**		1	2	**1**	1	1	1			***4***
C3			**0**		3	2					Ver.		***0***
C4	1	1	**1**		2	1	**1**		1	1			***4***
C5	1		**0**		2	2	**1**		2	3			***3***
C6	1	1	**1**		2	3	**1**	1	2	2			***4***
C7			**0**		4	4	**1**	1	1	2			***2***
C8		1	**0**		2	2	**1**		1	2			***4***
Anzahl "1":	**8**	**19**	**12**	**5**			**22**	**18**				**Ø A**	***4,00***
Anzahl "0":			**12**	**7**								**Ø B**	***4,06***
			Anzahl 1:		6	3	**Anzahl 1:**		17	11		**Ø C**	***2,88***
			Anzahl 2:		15	14	**Anzahl 2:**		4	7		**Ø ges.**	***3,65***
			Anzahl 3:		2	6	**Anzahl 3:**		0	4			
			Anzahl 4:		1	1	**Anzahl 4:**		1	0			

Gruppe α: Auswertung

	Aufgabe 7			Aufgabe 8**								
	benötigte Hilfe*	gut gelöst	wie schwierig		1. Durchgang		2. Durchgang		3. Durchgang		gut gelöst	wie schwierig
A1	1	3	1		x		987	9	855	8	2	3
A2	1	2	2		x		x		909	8	3	3
A3	2	3	3		920	8	933	8	972	9	2	2
A4	0	1	1		902	8	x		882	8	2	3
A5	2	3	2		x		942	8	918	8	2	2
A6	0	1	2		947	8	x		954	8	2	3
A7	2	4	3		x		915	8	729	6	2	1
A8	2	3	3		839	7	996	9	990	9	2	2
B1	1	3	2		839	7	960	8	891	8	2	2
B2	0	1	1		911	8	x		972	9	2	3
B3	2	2	2		x		x		954	8	3	3
B4	1	1	2		947	8	960	8	990	9	2	2
B5	2	3	2		x		825	7	999	9	2	3
B6	2	3	2		x		987	9	792	7	1	2
B7	2	3	3		848	7	x		882	8	3	2
B8	0	1	2		x		744	6	855	8	2	3
C1	1	2	2		x		942	8	819	7	2	2
C2	1	3	2		938		x		891	8	3	2
C3	2	3	2		x		x		999	9	3	2
C4	2	2	2		x		960	8	927	8	2	1
C5	2	3	3		x		879	7	909	8	3	3
C6	1	2	3		x		x		918	8	3	3
C7	2	2	2		x		x		891	8	3	2
C8	2	2	3		938	8	960	8	990	9	1	1
Anz 0	4			Anz <1000	10		14		24			
Anz 1	7			Ø <1000	903		928		912			
Anz 2	13			1. Sp.: 8		6		8		14		
Anz 3	0			1. Sp.: 9		0		3		7		
Anzahl 1:		5	3					Anzahl 1:			2	3
Anzahl 2:		7	14					Anzahl 2:			14	11
Anzahl 3:		11	7					Anzahl 3:			8	10
Anzahl 4:		1	0					Anzahl 4:			0	0

* dabei ist: 1) kleiner Hinweis, 2) "10 dazwischen", 3) Primzahleneigenschaften und weiteres

**x bedeutet: >1000

Gruppe α: Auswertung

Aufgabe 8

	1. Durchgang									
	Σ	1. Spalte			2. Spalte			3. Spalte		
A1	x	4	7	9	1	3	8	2	5	6
A2	x	1	4	9	2	6	7	3	5	8
A3	920	1	3	8	2	6	7	4	5	9
A4	902	1	3	7	2	5	6	4	8	9
A5	x	1	3	9	2	6	7	4	5	8
A6	947	1	4	5	2	7	8	3	6	9
A7	x	1	4	9	2	7	8	3	5	6
A8	839	3	6	9	2	4	7	1	5	8
B1	839	1	3	4	7	8	9	2	5	6
B2	911	1	4	5	6	7	9	2	3	8
B3	x	1	4	9	3	5	6	2	7	8
B4	947	1	3	7	2	4	9	5	6	8
B5	x	1	5	7	2	4	9	3	6	8
B6	x	3	7	8	2	6	9	1	4	5
B7	848	1	3	4	2	7	8	5	6	9
B8	x	1	4	9	3	5	7	2	6	8
C1	x	1	5	7	2	4	9	3	6	8
C2	938	1	3	8	2	4	7	5	6	9
C3	x	1	5	7	2	3	4	6	8	9
C4	x	1	4	9	2	5	7	3	6	8
C5	x	1	4	9	3	5	7	2	6	8
C6	x	1	4	9	2	3	7	5	6	8
C7	x	1	7	9	5	6	8	2	3	4
C8	938	1	3	7	2	4	8	5	6	9
1er		21			1			2		
9er:		11			6			7		
Ø Reihenfolge		4,39			5,10			5,51		

	2. Durchgang									
	Σ	1. Spalte			2. Spalte			3. Spalte		
A1	987	1	3	5	4	6	8	2	7	9
A2	x	1	4	6	3	8	9	2	5	7
A3	933	1	3	4	2	5	6	7	8	9
A4	x	1	3	5	2	6	8	4	7	9
A5	942	1	3	4	2	6	7	5	8	9
A6	x	1	4	6	2	8	9	3	5	7
A7	915	3	4	5	6	8	9	1	2	7
A8	996	1	4	8	3	6	7	2	5	9
B1	960	1	3	4	2	5	7	6	8	9
B2	x	4	6	9	1	5	8	2	3	7
B3	x	4	5	9	1	2	3	6	7	8
B4	960	1	3	4	2	5	7	6	8	9
B5	825	4	6	8	1	3	9	2	5	7
B6	987	1	4	6	3	5	8	2	7	9
B7	x	1	4	8	2	3	9	5	6	7
B8	744	3	4	8	1	5	7	2	6	9
C1	942	3	6	7	1	4	9	2	5	8
C2	x	2	3	6	1	8	9	4	5	7
C3	x	1	4	6	2	8	9	3	5	7
C4	960	1	3	4	2	5	7	6	8	9
C5	879	4	6	8	2	7	9	1	3	5
C6	x	4	5	6	1	2	8	3	7	9
C7	x	1	3	5	6	7	9	2	4	8
C8	960	1	3	4	2	5	7	6	8	9
1er		15			7			2		
9er:		2			10			12		
Ø Reihenfolge		3,99			5,19			5,82		

	3. Durchgang									
	Σ	1. Spalte			2. Spalte			3. Spalte		
A1	855	2	5	8	1	4	9	3	6	7
A2	909	1	2	5	4	6	7	3	8	9
A3	972	1	2	6	4	5	8	3	7	9
A4	882	2	5	8	1	4	6	3	7	9
A5	918	1	2	5	3	6	9	4	7	8
A6	954	2	5	8	3	6	7	1	4	9
A7	729	1	2	4	5	6	7	3	8	9
A8	990	1	2	6	7	8	9	3	4	5
B1	891	2	5	8	1	4	7	3	6	9
B2	972	1	2	6	5	8	9	3	4	7
B3	954	1	2	5	3	6	7	4	8	9
B4	990	3	4	8	1	2	5	6	7	9
B5	999	1	5	6	3	8	9	2	4	7
B6	792	2	5	9	1	4	7	3	6	8
B7	882	2	5	8	1	4	6	3	7	9
B8	855	2	5	8	1	4	9	3	6	7
C1	819	2	5	9	1	6	7	3	4	8
C2	891	1	4	7	2	6	9	3	5	8
C3	999	1	2	6	4	5	7	3	8	9
C4	927	1	2	5	3	4	7	6	8	9
C5	909	2	5	8	6	7	9	1	3	4
C6	918	1	2	5	3	4	6	7	8	9
C7	891	2	5	8	1	4	7	3	6	9
C8	990	1	3	4	2	5	8	6	7	9
1er		13			9			2		
9er:		2			8			14		
Ø Reihenfolge		3,92			5,18			5,90		

Die Ziffern unter "1./2./3. Spalte" entsprechen der Reihenfolge, mit der die Schülerinnen und Schüler die Felder befüllt haben

Gruppe β: Auswertung

	Fragebogen												
	keinen MO-Kurs weil	Gedanken math Wettb. Unbehagen	würde gern öfter an Wettb. Teilnehmen	Mathe Liebl. Fächer	nervös vor M-Schularbeiten	nervös vor M-Wettb.	mag rätseln/ knobeln	M-LehrerIn fördert	M-LehrerIn sollte öfter fördern	zähle mich zu Beg./Interess.	grunds. Interesse an Mathematik	Freizeit Mathe	im Mathematik-unterr. unterfordert
A9	1, 2	4	3	3	4	4	1	3	2	2	1	3	2
A10	2	4	3	2	2	4	2	2	1	2	2	3	2
A11	4	4	1	2	1	3	2	2	3	2	1	2	3
A12	1, 2	3	3	2	1	3	2	3	3	3	3	4	4
A13	1	3	4	3	3	4	3	3	2	2	4	4	3
A14	1, 2	3	4	2	4	4	2	3	1	2	2	3	2
A15	2	4	1	0	4	4	1	2	3	2	2	3	3
A16	1	2	4	3	2	3	2	1	4	3	4	3	3
A17	1	3	4	4	2	4	4	3	2	3	3	4	3
B9	4	2	2	3	1	4	2	1	3	4	3	3	3
B10	1, 2	1	4	3	2	4	2	2	3	3	3	3	4
B11	1, 2	2	4	3	1	2	2	3	2	3	2	3	3
B12	1, 2	4	3	4	1	4	1	3	2	2	1	2	3
B13	1, 2	3	2	1	4	4	1	1	3	1	2	3	3
B14	2	2	3	3	1	2	3	2	3	3	3	3	3
B15	2	3	3	1	3	4	3	1	3	1	2	3	2
B16	1	2	4	1	2	4	3	3	2	1	2	3	1
C9	1	3	2	1	3	4	2	1	2	1	1	1	2
C10	1	3	2	4	2	4	4	3	3	4	2	4	3
C11	1	3	2	1	1	1	2	2	2	2	3	3	4
C12	1	4	2	1	2	3	1	3	4	2	1	1	3
C13	1, 2	3	4	1	2	4	2	2	3	2	2	3	3
C14	4	3	2	2	1	2	2	2	3	2	2	4	3
C15	1	3	2	3	4	4	3	3	2	2	2	3	2
C16	1	2	2	3	1	3	2	2	2	1	2	4	4
C17	1, 2	3	2	2	2	4	2	2	3	2	2	3	3
C18	1	2	3	4	3	4	2	2	2	3	2	2	3
Anzahl Antwort 1	11	1	2	7	9	1	5	5	2	5	5	2	1
Anzahl Antwort 2	4	7	10	6	9	3	15	11	11	13	14	3	6
Anzahl Antwort 3	0	13	7	9	4	5	5	11	12	7	6	16	16
Anzahl Antwort 4	3	6	8	4	5	18	2	0	2	2	2	6	4

in diesem Bereich bedeutet:
1) stimme sehr zu bzw. sehr oft; 2) stimme eher zu bzw. oft;
3) stimme eher nicht zu bzw. selten; 4) stimme gar nicht zu bzw. nie

Anzahl 1,2 9

Gruppe β: Auswertung

	Aufgabe 1		Aufgabe 2				Aufgabe 3				Aufgabe 4				
	Trick	**korrekt gelöst**	**korrekt gelöst**	gut gelöst	wie schwierig	warum nicht bearbeitet	**korrekt gelöst**	gut gelöst	wie schwierig	warum nicht bearbeitet	**korrekt gelöst**	Zusatzfrage korrekt	gut gelöst	wie schwierig	warum nicht bearbeitet
A9	0	**0**	**1**	1	1		**0**	3	3		**0**		2	3	
A10	0	**0**	**0**	4	4		**0**	1	1		**0**		3	4	
A11	0	**0**	**0**	4	3					V	**1**	1	2	1	
A12	a	**0**	**0**	3	3		**1**	2	3		**0**		3	3	
A13	a	**0**	**1**	1	2		**1**	1	1		**0,5**		4	4	
A14	a	**0**	**0**	4	4		**1**	2	2		**0**		3	4	
A15	a	**0**	**1**	2	2		**1**	3	2		**1**	0	2	1	
A16	0	**0**	**0**	4	4		**0**	3	3		**1**	1	1	3	
A17	0	**0**	**0**	3	2		**0**	3	2		**0**		4	3	
B9	0	**0**	**0**	4	3		**1**	4	3		**0,5**		4	2	
B10	0	**0**	**0**	2	2		**0**			V	**0**				And.
B11	0	**0**	**0**	4	4					V	**0**		2	2	
B12	a	**0**	**1**	1	1		**0,5**	1	2		**0**		3	2	
B13	0	**0**	**0**	4	3		**0**	3	3		**0**		4	3	
B14	0	**0**	**0**	4	4		**0**			V	**0**		3	3	
B15	0	**0**	**0**			V, Z	**0,5**	2	2		**1**		1	3	
B16	a	**0**	**0**	2	3		**1**	1	1		**0**		2	3	
C9	0	**0**	**0**	2	2		**0**	1	2		**0**		1	1	
C10	0	**0**	**0**	2	2					V	**0**		3	3	
C11	a?	**0**	**0**	2	2		**1**	1	1		**0**		3	3	
C12	0	**0**	**0**	2	3		**0**			V	**0**		1	2	
C13	0	**0**	**0**	4	4		**0**	4	4		**0**		4	4	
C14	0	**0**	**0**			V, Z	**1**	2	2		**0**				And.
C15	0	**0**	**0**	1	2					And.	**0**		2	3	
C16	a	**0**	**0**	2	3		**0**	3	4		**0**		2	3	
C17	0	**0**	**1**	2	3		**0**	1	1		**0**		2	2	
C18	0	**0**	**0**	4	3					V	**0**		4	2	
Anzahl "1":	0	**0**	**5**				**8**				**4**	**2**			
Anzahl "0":	19	**27**	**22**									1			
Anzahl "a":	**7**		**Anzahl 1:**	4	2		**Anzahl 1:**	7	5		**Anzahl 1:**		4	3	
			Anzahl 2:	9	8		**Anzahl 2:**	4	7		**Anzahl 2:**		8	6	
			Anzahl 3:	2	9		**Anzahl 3:**	6	5		**Anzahl 3:**		7	12	
			Anzahl 4:	10	6		**Anzahl 4:**	2	2		**Anzahl 4:**		6	4	

in der Auswertung: 0) nein / nicht gelöst; 1) ja / gelöst

Gruppe β: Auswertung

	Aufgabe 5							Aufgabe 6						
	probieren / zählen	systematisch	**korrekt gelöst**	Zusatzfrage gelöst	gut gelöst	wie schwierig	warum nicht bearbeitet	**korrekt gelöst**	Zusatzfrage gelöst	gut gelöst	wie schwierig	warum nicht bearbeitet		***Richtige Aufgaben im schriftlichen Teil***
A9		1	**0**		2	2		**1**		2	2			***2***
A10	1	1	**0,5**	0,5	2	3		**1**	1	1	2			***1,5***
A11		1	**0,5**	0	2	2		**0,5**		2	1			***2***
A12	1	1	**0**	0	3	3						Z		***1***
A13		1	**0**		2	2		**1**	1	1	1			***3,5***
A14							Z	**1**	1	2	2			***2***
A15	1	1	**0,5**		3	3		**1**	1	2	2			***4,5***
A16	1	1	**1**		2	1		**1**	1	1	2			***3***
A17	1		**0**		4	3		**1**	1	2	1			***1***
B9		1	**0**		4	2				4	3			***1,5***
B10	1	1	**0**				Z	**0**				Z		***0***
B11							V	**1**	1	1	2			***1***
B12	1	1	**0**		3	3		**1**		2	2			***2,5***
B13	1		**1**	0	1	2		**1**	1	1	3			***2***
B14	1		**0**		3	3		**0**		3	3			***0***
B15	1		**0**		3	2						V, Z		***1,5***
B16	1	1	**0**	0	1	1						Z		***1***
C9			**0**		2	2		**1**		2	1			***1***
C10							And.	**0**		3	3			***0***
C11					3	3						V, Z		***1***
C12	1		**0**		k.A.	k.A.		**0**				V, Z		***0***
C13		arg	**0**		4	4		**1**		2	3			***1***
C14	1	1	**0**		3	k.A.		**1**		1	k.A.			***2***
C15	1		**0**		1	2		**0**		2	2			***0***
C16			**0**		3	3		**1**		1	1			***1***
C17	1		**0**		4	4		**1**	1	2	2			***2***
C18	1	1	**0**				V	**0**	1			V		***0***
Anzahl "1":	**16**	**13**	**2**	**0**				**15**	**10**				**Ø A**	***2,28***
													Ø B	***1,19***
			Anzahl 1:		3	2		**Anzahl 1:**		7	5		**Ø C**	***0,8***
			Anzahl 2:		6	8		**Anzahl 2:**		10	9		**Ø ges.**	***1,41***
			Anzahl 3:		8	8		**Anzahl 3:**		2	5			
			Anzahl 4:		4	2		**Anzahl 4:**		1	0			

Gruppe β: Auswertung

	Aufgabe 7				Aufgabe 8**							
	benötigte Hilfe*	gut gelöst	wie schwierig		1. Durchgang		2. Durchgang		3. Durchgang		gut gelöst	wie schwierig
A9	2,5	2	2		983	9	825	7	909	8	3	2
A10	2,5	3	3		929	8	x		999	9	2	2
A11	2	2	2		x		x		999		3	3
A12	2,5	4	4		x		942	8	810	7	3	3
A13	2,5	3	3		884	8	925	8	x		2	3
A14	2,5	3	3		x		x		882	8	3	2
A15	2	2	2		929	8	960	8	x		2	2
A16	2	1	2		x		x		801	7	3	3
A17	2	3	3		x		753	6	882	8	2	2
B9	2	3	1		902	8	x		684		2	2
B10	2,5	3	3		x		996	9	999	9	1	2
B11	2	2	3		704	6	933	8	918	8	2	2
B12	2	2	3		848	7	x		855	7	3	2
B13	0	1	2		x		922	8	999	9	1	3
B14	2,5	3	3		x		x		711	6	3	3
B15	2,5	3	3		875	8	x		882	8	3	3
B16	2	1	2		x		x		x		3	3
C9	2,5	1	1		785	7	x		791	7	2	1
C10	2,5	3	3		947	8	x		900	8	2	2
C11	2,5	1	3		x		645	5	882	8	1	2
C12	3,5	2	2		902	8	864	7	882	8	2	1
C13	-	-	-		n		n		n		-	-
C14	-	-	-		n		n		n		-	-
C15	2	1	2		x		933	8	999	9	1	2
C16	2,5	2	2		803	7	951	8	927	8	1	2
C17	2,5	3	3		992	9	942	8	990	9	2	1
C18	1	2	2		x		834	7	783	7	2	2
Anz 0	1			Anz <1000	13		14		22			
Anz 1	1			Ø <1000	883		888		886			
Anz 2/2,5	22			1. Sp.: 8		7		8		9		
Anz 3/3,5	1			1. Sp.: 9		2		1		5		
Anzahl 1:		6	2						**Anzahl 1:**		5	3
Anzahl 2:		8	10						**Anzahl 2:**		11	14
Anzahl 3:		10	12						**Anzahl 3:**		9	8
Anzahl 4:		1	1						**Anzahl 4:**		0	0

* dabei ist: 1) kleiner Hinweis, 2) "10 dazwischen", 3) Primzahleneigenschaften und weiteres

**x bedeutet: >1000

Gruppe β: Auswertung

Aufgabe 8

1. Durchgang

	Σ	1. Spalte			2. Spalte			3. Spalte		
A9	983	6	7	8	1	3	4	2	5	9
A10	929	1	3	7	2	5	8	4	6	9
A11	x	1	2	5	3	4	9	6	7	8
A12	x	1	4	9	2	3	5	6	7	8
A13	884	1	3	8	5	6	7	2	4	9
A14	x	4	5	7	1	2	9	3	6	8
A15	929	1	3	7	4	8	9	2	5	6
A16	x	3	7	8	2	4	6	1	5	9
A17	x	4	5	8	1	2	6	3	7	9
B9	902	1	4	5	3	7	8	2	6	9
B10	x	2	3	5	1	7	9	4	6	8
B11	704	3	6	7	1	5	8	2	4	9
B12	848	5	6	7	1	2	9	3	4	8
B13	x	1	4	9	3	5	6	2	7	8
B14	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B15	875	1	3	7	4	5	6	2	8	9
B16	x	3	7	8	1	4	9	2	5	6
C9	785	1	3	4	5	6	7	2	8	9
C10	947	1	3	8	2	4	9	5	6	7
C11	x	1	8	9	3	5	7	2	4	6
C12	902	3	4	7	1	6	9	2	5	8
C15	x	5	7	9	1	3	8	2	4	6
C16	803	1	3	4	2	5	6	7	8	9
C17	992	4	5	7	1	3	8	2	6	9
C18	x	2	3	4	1	5	6	7	8	9
1er		13			11			1		
9er:		4			8			13		
Reihenfolge		4,49			4,71			5,80		

2. Durchgang

	Σ	1. Spalte			2. Spalte			3. Spalte		
A9	825	4	6	8	1	3	9	2	5	7
A10	x	1	4	6	3	8	9	2	5	7
A11	x	1	8	9	4	5	6	2	3	7
A12	942	1	3	4	2	7	8	5	6	9
A13	925	1	6	8	3	4	9	2	5	7
A14	x	5	6	9	3	4	8	1	2	7
A15	960	1	3	4	2	5	7	6	8	9
A16	x	1	3	5	4	6	9	2	7	8
A17	753	3	4	8	1	5	9	2	6	7
B9	x	1	4	6	3	8	9	2	5	7
B10	996	1	4	6	3	7	8	2	5	9
B11	933	3	4	5	1	2	6	7	8	9
B12	x	1	8	9	2	5	7	3	4	6
B13	922	3	4	5	6	7	9	1	2	8
B14	x	2	1	7	6	3	5	4	8	9
B15	x	1	8	9	2	4	5	3	6	7
B16	x	1	4	8	2	5	9	3	6	7
C9	x	1	4	6	3	7	8	2	5	9
C10	x	1	4	8	2	7	9	3	5	6
C11	645	3	6	8	1	4	9	2	5	7
C12	864	1	3	6	2	7	8	4	5	9
C15	933	1	6	8	3	7	9	2	4	5
C16	951	1	3	4	2	6	9	5	7	8
C17	942	1	3	4	6	7	9	2	5	8
C18	834	1	3	8	4	5	7	2	6	9
1er		19			4			2		
9er:		4			13			8		
Reihenfolge		4,28			5,45			5,27		

3. Durchgang

	Σ	1. Spalte			2. Spalte			3. Spalte		
A9	909	5	6	9	1	2	7	3	4	8
A10	999	1	2	6	3	4	8	5	7	9
A11	999	1	2	6	3	4	8	5	7	9
A12	810	1	2	8	3	4	5	6	7	9
A13	x	1	2	7	5	6	9	3	4	8
A14	882	2	5	8	1	4	6	3	7	9
A15	x	2	4	7	3	5	9	1	6	8
A16	801	1	6	9	4	5	7	2	3	8
A17	882	1	2	5	4	6	8	3	7	9
B9	684	1	2	9	4	6	8	3	5	7
B10	999	1	2	6	5	7	9	3	4	8
B11	918	2	5	8	1	6	7	3	4	9
B12	855	1	5	8	3	6	7	2	4	9
B13	999	5	6	8	2	7	9	1	3	4
B14	711	1	2	4	5	7	8	3	6	9
B15	882	2	5	8	1	6	9	3	4	7
B16	x	1	5	6	2	3	8	4	7	9
C9	791	2	5	9	1	3	4	6	7	8
C10	900	2	5	8	1	3	9	4	6	7
C11	882	1	2	5	6	8	9	3	4	7
C12	882	1	2	5	4	6	8	3	7	9
C15	999	1	5	6	3	8	9	2	4	7
C16	927	2	5	8	1	3	6	4	7	9
C17	990	3	4	8	2	6	9	1	5	7
C18	783	2	5	9	1	4	6	3	7	8
1er		14			8			3		
9er:		5			9			11		
Reihenfolge		4,25			5,20			5,55		

Die Ziffern unter "1./2./3. Spalte" entsprechen der Reihenfolge, mit der die Schülerinnen und Schüler die Felder befüllt haben

Schwierigkeit der Aufgaben (in Prozent)

	2		3		4		5		6		7		8	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
sehr schwierig	63,64	8	28,57	26,32	11,11	12	12,5	10	50	26,32	9,524	8	12,5	12
eher schwierig	22,73	32	42,86	36,84	44,44	24	58,33	40	31,82	47,37	61,9	40	45,83	56
eher einfach	13,64	36	19,05	26,32	33,33	48	25	40	18,18	26,32	28,57	48	41,67	32
sehr einfach	0	24	9,524	10,53	11,11	16	4,167	10	0	0	0	4	0	0

	2		3		4		5		6		7		8	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
eher/sehr schwierig	86,36	40	71,43	63,16	55,56	36	70,83	50	81,82	73,68	71,43	48	58,33	68
eher/sehr einfach	13,64	60	28,57	36,84	44,44	64	29,17	50	18,18	26,32	28,57	52	41,67	32