Aufgaben über Zahlen mit interessanten Ziffern

ausgewählte Aufgaben aus dem mathematischen "Duell"
Bílovec - Chorzów - Graz - Přerov

Robert Geretschläger
Graz

Tag der Mathematik, Graz
4. Februar, 2016

Das mathematische “Duell’, Kategorien

- 4 Schulen, je 12 Teilnehmende, plus Gäste

Das mathematische “Duell’, Kategorien

- 4 Schulen, je 12 Teilnehmende, plus Gäste
- 3 Altersgruppen: A, B, C

Das mathematische “Duell’, Kategorien

- 4 Schulen, je 12 Teilnehmende, plus Gäste
- 3 Altersgruppen: A, B, C
- 2 Wettbewerbe: Individual, Team

Das mathematische “Duell’, Kategorien

- 4 Schulen, je 12 Teilnehmende, plus Gäste
- 3 Altersgruppen: A, B, C
- 2 Wettbewerbe: Individual, Team
- 1 Sprache: Englisch

- Laufzeit 2014/15 bis 2016/17

- Laufzeit 2014/15 bis 2016/17
- 7 Partnerinstitutionen:
  4 Schulen in Bílovec - Chorzów - Graz - Přerov
  dazu
  Kars-Franzens-Universität Graz, Palacky Universität Olomouc, Schlesische Universität Katowice

Das mathematische “Duell’, ein Erasmus+ Projekt

- Laufzeit 2014/15 bis 2016/17
- 7 Partnerinstitutionen:
  4 Schulen in Bílovec - Chorzów - Graz - Přerov
  dazu
  Kars-Franzens-Universität Graz, Palacky Universität Olomouc, Schlesische Universität Katowice
- Dotation: 150 000 Euro

C Team, Aufgabe 2, 2013

Wir betrachten positive ganze Zahlen, die in der Dezimalschreibweise unter Verwendung einer einzigen (möglicherweise sich wiederholenden) Ziffer geschrieben werden. Derartige Zahlen bezeichnen wir als *uni-digit Zahlen*.

a) Bestimme eine uni-digit Zahl, die mit der Ziffer 7 geschrieben wird und durch 3 teilbar ist.

b) Bestimme eine uni-digit Zahl, die mit der Ziffer 3 geschrieben wird und durch 7 teilbar ist.

c) Bestimme eine uni-digit Zahl, die mit der Ziffer 5 geschrieben wird und durch 7 teilbar ist.

d) Beweise, dass es keine uni-digit Zahl geben kann, die mit der Ziffer 7 geschrieben wird und durch 5 teilbar ist.

(*Robert Geretschläger*)

C Team, Aufgabe 2, 2013, Lösung

a) $777 = 7 \cdot 111 = 7 \cdot 37 \cdot 3.$

C Team, Aufgabe 2, 2013, Lösung

a) $777 = 7 \cdot 111 = 7 \cdot 37 \cdot 3.$

b) $333333 = 333 \cdot 1001 = 333 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13.$

C Team, Aufgabe 2, 2013, Lösung

a) $777 = 7 \cdot 111 = 7 \cdot 37 \cdot 3.$

b) $333333 = 333 \cdot 1001 = 333 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13.$

c) $555555 = 555 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13.$

C Team, Aufgabe 2, 2013, Lösung

a) $777 = 7 \cdot 111 = 7 \cdot 37 \cdot 3.$

b) $333333 = 333 \cdot 1001 = 333 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13.$

c) $555555 = 555 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13.$

d) Die letzte Ziffer einer durch 5 teilbaren Zahl ist immer 0 oder 5. Eine durch 5 teilbare Zahl kann also nicht nur mit der Ziffer 7 geschrieben werden. $\square$

Wir bezeichnen eine Zahl, die in Dezimalschreibweise nur mit der Ziffer 1 geschrieben wird als *Onesyzahl* und eine Zahl, die nur mit der Ziffer 7 geschrieben wird als *Sevensyzahl*. Bestimme eine durch 7 teilbare Onesyzahl. Zeige ferner, dass es zu jeder Sevensyzahl k eine Onesyzahl m gibt, sodass m ein Vielfaches von k ist.
(*Robert Geretschläger*)

Onesyzahlen: $111\ldots111$

B Individual, Aufgabe 4, 2013, Lösung 1/2

Onesyzahlen: $111\ldots111$

nicht durch 7 teilbar: $1;\quad 11;\quad 111 = 3 \cdot 37;\quad 1111 = 11 \cdot 101$

Onesyzahlen: $111\ldots111$

nicht durch 7 teilbar: $1;\quad 11;\quad 111 = 3\cdot 37;\quad 1111 = 11\cdot 101$

Eine mögliche durch 7 teilbare Onesyzahl ist
$111111 = 111\cdot 1001 = 111\cdot 7\cdot 11\cdot 13.$ $\square$

Sevensyzahl: $k = 777\ldots777$

Sevensyzahl: $k = 777\ldots777$

Um einzusehen, dass es zu jeder Sevensyzahl k ein Vielfaches gibt, das eine Onesyzahl ist, stellen wir zuerst fest, dass es unendlich viele Onesyzahlen gibt. Nach dem Schubfachschluss gibt es somit zwei verschiedene Onesyzahlen $m_1 > m_2$ mit $m_1 \equiv m_2 \pmod{k}$.
$m_1 = 11111\ldots111$
$m_2 = 111\ldots111$

Sevensyzahl: $k = 777\ldots777$

Um einzusehen, dass es zu jeder Sevensyzahl k ein Vielfaches gibt, das eine Onesyzahl ist, stellen wir zuerst fest, dass es unendlich viele Onesyzahlen gibt. Nach dem Schubfachschluss gibt es somit zwei verschiedene Onesyzahlen $m_1 > m_2$ mit $m_1 \equiv m_2 \pmod{k}$.
$m_1 = 11111\ldots111$
$m_2 = 111\ldots111$

$m_1 - m_2 = 11\cdots1100\ldots00$

Sevensyzahl: $k = 777\dots777$

Um einzusehen, dass es zu jeder Sevensyzahl k ein Vielfaches gibt, das eine Onesyzahl ist, stellen wir zuerst fest, dass es unendlich viele Onesyzahlen gibt. Nach dem Schubfachschluss gibt es somit zwei verschiedene Onesyzahlen $m_1 > m_2$ mit $m_1 \equiv m_2 \pmod{k}$.
$m_1 = 11111\dots111$
$m_2 = 111\dots111$

$m_1 - m_2 = 11\cdots1100\dots00$

Es folgt somit, dass $m_1 - m_2$ durch k teilbar ist. Die Zahl $m_1 - m_2$ kann in der Form $m_1 - m_2 = m \cdot 10^r$ angeschrieben werden, wobei m auch eine Onesyzahl ist. Da k sicherlich nicht durch 2 oder 5 teilbar ist, folgt, dass m ebenfalls durch k teilbar sein muss, was den Beweis abschließt. $\square$

a) Eine Zahl x kann sowohl im Zahlensystem zur Basis 8 als auch zur Basis 16 mit nur der Ziffer a geschrieben werden, also

$$x = (aa \dots a)_8 = (aa \dots a)_{16}.$$

Bestimme alle möglichen Werte von x.

b) Bestimme so viele Zahlen x wie möglich, die in der Form $x = (11 \dots 1)_b$ in mindestens zwei verschiedenen Zahlensystemen mit Basen b_1 und b_2 geschrieben werden können.
(*Autor unbekannt*)

a). Gilt $(aa\ldots a)_8 = (aa\ldots a)_{16}$, so gibt es m und n mit

$$a\cdot 16^m + a\cdot 16^{m-1} + \cdots + a\cdot 16 + a = a\cdot 8^n + a\cdot 8^{n-1} + \cdots + a\cdot 8 + a$$

.

B Team, Aufgabe 1, 2005, Lösung 1/2

a). Gilt $(aa\dots a)_8 = (aa\dots a)_{16}$, so gibt es m und n mit

$$a\cdot 16^m + a\cdot 16^{m-1} + \cdots + a\cdot 16 + a = a\cdot 8^n + a\cdot 8^{n-1} + \cdots + a\cdot 8 + a$$

. Dies ist gleichwertig mit

$$16^m + \cdots + 16 = 8^n + \cdots + 8 \iff 16\cdot\frac{16^m-1}{16-1} = 8\cdot\frac{8^n-1}{8-1}$$

a). Gilt $(aa\dots a)_8 = (aa\dots a)_{16}$, so gibt es m und n mit

$$a \cdot 16^m + a \cdot 16^{m-1} + \dots + a \cdot 16 + a = a \cdot 8^n + a \cdot 8^{n-1} + \dots + a \cdot 8 + a$$

. Dies ist gleichwertig mit

$$16^m + \dots + 16 = 8^n + \dots + 8 \iff 16 \cdot \frac{16^m - 1}{16 - 1} = 8 \cdot \frac{8^n - 1}{8 - 1}$$

$$\iff 2 \cdot \frac{16^m - 1}{15} = \frac{8^n - 1}{7} \iff \frac{2 \cdot 16^m - 2}{15} = \frac{8^n - 1}{7}$$

a). Gilt $(aa\ldots a)_8 = (aa\ldots a)_{16}$, so gibt es m und n mit

$$a\cdot 16^m + a\cdot 16^{m-1} + \cdots + a\cdot 16 + a = a\cdot 8^n + a\cdot 8^{n-1} + \cdots + a\cdot 8 + a$$

. Dies ist gleichwertig mit

$$16^m + \cdots + 16 = 8^n + \cdots + 8 \iff 16\cdot\frac{16^m-1}{16-1} = 8\cdot\frac{8^n-1}{8-1}$$

$$\iff 2\cdot\frac{16^m-1}{15} = \frac{8^n-1}{7} \iff \frac{2\cdot 16^m-2}{15} = \frac{8^n-1}{7}$$

$$\iff 14\cdot 16^m - 14 = 15\cdot 8^n - 15 \iff 15\cdot 8^n = 14\cdot 16^m + 1.$$

B Team, Aufgabe 1, 2005, Lösung 1/2

a). Gilt $(aa\dots a)_8 = (aa\dots a)_{16}$, so gibt es m und n mit

$$a\cdot 16^m + a\cdot 16^{m-1} + \cdots + a\cdot 16 + a = a\cdot 8^n + a\cdot 8^{n-1} + \cdots + a\cdot 8 + a$$

. Dies ist gleichwertig mit

$$16^m + \cdots + 16 = 8^n + \cdots + 8 \iff 16\cdot\frac{16^m-1}{16-1} = 8\cdot\frac{8^n-1}{8-1}$$

$$\iff 2\cdot\frac{16^m-1}{15} = \frac{8^n-1}{7} \iff \frac{2\cdot 16^m-2}{15} = \frac{8^n-1}{7}$$

$$\iff 14\cdot 16^m - 14 = 15\cdot 8^n - 15 \iff 15\cdot 8^n = 14\cdot 16^m + 1.$$

Die rechte Seite ist ungerade. Somit gilt $n=0$, und $m=0$.

a). Gilt $(aa\dots a)_8 = (aa\dots a)_{16}$, so gibt es m und n mit

$$a \cdot 16^m + a \cdot 16^{m-1} + \cdots + a \cdot 16 + a = a \cdot 8^n + a \cdot 8^{n-1} + \cdots + a \cdot 8 + a$$

. Dies ist gleichwertig mit

$$16^m + \cdots + 16 = 8^n + \cdots + 8 \iff 16 \cdot \frac{16^m - 1}{16 - 1} = 8 \cdot \frac{8^n - 1}{8 - 1}$$

$$\iff 2 \cdot \frac{16^m - 1}{15} = \frac{8^n - 1}{7} \iff \frac{2 \cdot 16^m - 2}{15} = \frac{8^n - 1}{7}$$

$$\iff 14 \cdot 16^m - 14 = 15 \cdot 8^n - 15 \iff 15 \cdot 8^n = 14 \cdot 16^m + 1.$$

Die rechte Seite ist ungerade. Somit gilt $n = 0$, und $m = 0$. Die einzig möglichen Werte von a sind $a \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$, und wir haben somit $x \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$. $\square$

b) Gilt $x = (11\ldots1)_{b_1} = (11\ldots1)_{b_2}$, folgt $x = 1$ oder $b_1, b_2 > 1$.

b) Gilt $x = (11\ldots1)_{b_1} = (11\ldots1)_{b_2}$, folgt $x = 1$ oder $b_1, b_2 > 1$.

Es gelte $1 < b_1 < b_2$. Wir wollen

$$x = \sum_{i=0}^{m} b_1^i = \sum_{j=0}^{n} b_2^j \quad \text{mit} \quad m > n.$$

B Team, Aufgabe 1, 2005, Lösung 2/2

b) Gilt $x = (11\ldots1)_{b_1} = (11\ldots1)_{b_2}$, folgt $x = 1$ oder $b_1, b_2 > 1$.

Es gelte $1 < b_1 < b_2$. Wir wollen

$$x = \sum_{i=0}^{m} b_1^i = \sum_{j=0}^{n} b_2^j \quad \text{mit} \quad m > n.$$

Für ein beliebiges $b_1 > 1$ wählen wir $b_2 = \sum_{i=1}^{m} b_1^i$. Dann gilt

$$(11)_{b_2} = 1 \cdot b_2 + 1 \cdot b_2^0 = \sum_{i=1}^{m} b_1^i + 1 \cdot b_1^0 = \sum_{i=0}^{m} 1 \cdot b_1^i = (11\ldots1)_{b_1},$$

und wir haben unendlich viele x mit der geforderten Eigenschaft.□

Wir bezeichnen positive ganze Zahlen, die in Dezimalschreibweise nur mit den Ziffern 1 und 2 geschrieben werden als *Grazzahlen*. Wir stellen fest, dass 2 eine 1-ziffrige Grazzahl ist, die durch 2^1 teilbar ist, dass ferner 12 eine 2-ziffrige Grazzahl ist, die durch 2^2 teilbar ist, und dass 112 eine 3-ziffrige Grazzahl ist, die durch 2^3 teilbar ist.

a) Bestimme die kleinste 4-ziffrige Grazzahl, die durch 2^4 teilbar ist.

b) Bestimme für ein $n > 4$ eine n-ziffrige Grazzahl, die durch 2^n teilbar ist.

c) Beweise, dass es zu jeder positiven ganzen Zahl n eine n-ziffrige Grazzahl gibt, die durch 2^n teilbar ist.

(*Robert Geretschläger*)

A Team, Aufgabe 3, 2013, Lösung

einige 4-ziffrige Kandidaten: 2222, 1212, 2112

A Team, Aufgabe 3, 2013, Lösung

einige 4-ziffrige Kandidaten: 2222, 1212, 2112

$$2222 = 2 \cdot 1111, \quad 1212 = 2^2 \cdot 303, \quad 2112 = 64 \cdot 33 = 2^6 \cdot 33$$

A Team, Aufgabe 3, 2013, Lösung

einige 4-ziffrige Kandidaten: 2222, 1212, 2112

$$2222 = 2 \cdot 1111, \quad 1212 = 2^2 \cdot 303, \quad 2112 = 64 \cdot 33 = 2^6 \cdot 33$$

Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass es zu jedem n eine eindeutige n-ziffrige Grazzahl gibt. Offensichtlich ist 2 die einzige 1-ziffrige, da 1 nicht durch 2^1 teilbar ist, aber 2 sehr wohl. Wir nehmen also an, es existiere eine eindeutige k-ziffrige Grazzahl g für ein beliebiges $k \geq 1$. Da g durch 2^k teilbar ist, gilt entweder $g \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$ oder $g \equiv 2^k \pmod{2^{k+1}}$. Da $10^k \equiv 2^k \pmod{2^{k+1}}$ und $2 \cdot 10^k \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$, gilt entweder $10^k + g \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$ oder $2 \cdot 10^k + g \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$, und es folgt somit die eindutige Existenz einer $n-1$-ziffrigen Grazzahl. Es ist jetzt nicht schwer die Lösung zu vervollständigen. Da 112 die 3-ziffrige Grazzahl ist und $112 = 16 \cdot 7$ durch 16 teilbar ist, ist 2112 die 4-ziffrige Grazzahl. Da $2112 = 32 \cdot 66$ durch $2^5 = 32$ teilbar ist, ist 22112 die 5-ziffrige Grazzahl, und der Beweis ist fertig. $\square$

C Individual, Aufgabe 3, 2011

Bestimme die Gesamtzahl zehnziffriger, durch 4 teilbarer Zahlen, die nur mit den Ziffern 1 und 2 geschrieben werden.
(*Józef Kalinowski*)

C Individual, Aufgabe 3, 2011, Lösung

zum Beispiel: $2212211112 = 4 \cdot 553052778$

C Individual, Aufgabe 3, 2011, Lösung

zum Beispiel: $2212211112 = 4 \cdot 553052778$

Eine durch 4 teilbare zehnziffrige Zahl n muss in einer durch 4 teilbaren zweiziffrigen Zahl enden. Die letzten beiden Ziffern jeder solchen Zahl müssen also 12 sein, und zwar in dieser Reihenfolge. Jede der übrigen 8 Ziffern kann entweder 1 oder 2 sein. Dies ergibt insgesamt 2^8 Möglichkeiten.

zum Beispiel: $2212211112 = 4 \cdot 553052778$

Eine durch 4 teilbare zehnziffrige Zahl n muss in einer durch 4 teilbaren zweiziffrigen Zahl enden. Die letzten beiden Ziffern jeder solchen Zahl müssen also 12 sein, und zwar in dieser Reihenfolge. Jede der übrigen 8 Ziffern kann entweder 1 oder 2 sein. Dies ergibt insgesamt 2^8 Möglichkeiten.

Es existieren also insgesamt $2^8 = 256$ zehnziffrige Zahlen mit der geforderten Eigenschaft. $\square$

Es sei A eine sechsziffrige positive ganze Zahl, die nur mit den beiden Ziffern x und y geschrieben wird. Weiters sei B die sechsziffrige Zahl, die aus A entsteht, wenn alle Ziffern x durch y ersetzt werden und gleichzeitig alle Ziffern y durch x. Beweise, dass die Summe $A + B$ durch 91 teilbar sein muss.
(*Józef Kalinowski*)

zum Beispiel: $229299 + 992922 = 1222221 = 91 \cdot 13431$

B Individual, Aufgabe 1, 2011, Lösung

zum Beispiel: $229299 + 992922 = 1222221 = 91 \cdot 13431$

Seien $A = \overline{c_5 c_4 c_3 c_2 c_1 c_0}$ und $B = \overline{d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0}$, wobei $c_i, d_i \in \{x, y\}$, $c_i \neq d_i$ für $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und $x, y \in \{1, \dots, 9\}$ verschiedene Ziffern ungleich 0 sind.
Wegen $c_i + d_i = x + y \neq 0$ für $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ gilt

$$A + B = (x + y) \cdot (10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) =$$

$$= (x + y) \cdot 111111 = (x + y) \cdot 91 \cdot 1221,$$

Die Zahl $A + B$ ist somit sicher durch 91 teilbar. $\square$

C Team, Aufgabe 1, 2010

Bestimme die Gesamtzahl geordneter Paare (x, y) von Ziffern mit der Eigenschaft, dass die Zahl $\overline{xyx}$ durch 3 teilbar ist und die Zahl $\overline{yxy}$ durch 4 teilbar ist.
(*Autor unbekannt*)

Beispiel: $525 = 3 \cdot 175$ und $252 = 4 \cdot 63$.

C Team, Aufgabe 1, 2010, Lösung

Beispiel: $525 = 3 \cdot 175$ und $252 = 4 \cdot 63$.
Eine Zahl der Gestalt $\overline{yxy}$ ist genau dann durch 4 teilbar, wenn $\overline{xy}$ durch 4 teilbar ist, mit $y \neq 0$. Somit gilt

$$(x, y) \in \{(1;2), (1;6), (2;4), (2;8), (3;2), (3;6), (4;4), (4;8), (5;2), \dots$$

$$\dots, (5;6), (6;4), (6;8), (7;2), (7;6), (8;4), (8;8), (9;2), (9;6)\}.$$

Eine Zahl der Gestalt $\overline{xyx}$ ist genau dann durch 3 teilbar, wenn es ihre Ziffernsumme ist. Es muss also $2x + y$ durch 3 teilbar sein. Kontrolle aller oben aufgelisteten Paare ergibt also sechs Möglichkeiten, nämlich

$$(x, y) \in \{(2;8), (3;6), (4;4), (5;2), (8;8), (9;6)\}.$$

Beispiel: $525 = 3 \cdot 175$ und $252 = 4 \cdot 63$.
Eine Zahl der Gestalt $\overline{yxy}$ ist genau dann durch 4 teilbar, wenn $\overline{xy}$ durch 4 teilbar ist, mit $y \neq 0$. Somit gilt

$$(x, y) \in \{(1;2),(1;6),(2;4),(2;8),(3;2),(3;6),(4;4),(4;8),(5;2),\ldots$$

$$\ldots,(5;6),(6;4),(6;8),(7;2),(7;6),(8;4),(8;8),(9;2),(9;6)\}.$$

Eine Zahl der Gestalt $\overline{xyx}$ ist genau dann durch 3 teilbar, wenn es ihre Ziffernsumme ist. Es muss also $2x + y$ durch 3 teilbar sein. Kontrolle aller oben aufgelisteten Paare ergibt also sechs Möglichkeiten, nämlich

$$(x, y) \in \{(2;8),(3;6),(4;4),(5;2),(8;8),(9;6)\}.$$

Es gibt somit insgesamt sechs geordnete Paare mit den geforderten Eigenschaften. $\square$

Bestimme die Anzahl aller sechsziffrigen, durch sieben teilbaren, Palindromzahlen.
[*Bemerkung*. Eine schechsziffrige Palindromzahl ist eine positive ganze Zahl, die in der Form $\overline{abccba}$ geschrieben wird, mit Ziffern $a \neq 0$, b und c.]
(*Pavel Calábek*)

B Team, Aufgabe 3, 2015, Lösung

Es gilt

$$\overline{abccba} = 100001a + 10010b + 1100c$$

$$= 7(14286a + 1430b + 157c) - (a - c).$$

Eine solche Zahl ist genau dann durch 7 teilbar, wenn $(a - c)$ durch 7 teilbar ist.

B Team, Aufgabe 3, 2015, Lösung

Es gilt

$$\overline{abccba} = 100001a + 10010b + 1100c$$

$$= 7(14286a + 1430b + 157c) - (a - c).$$

Eine solche Zahl ist genau dann durch 7 teilbar, wenn $(a - c)$ durch 7 teilbar ist.
$a \neq 0$ und c sind Ziffern, und es gilt somit $-8 \leq a - c \leq 9$. Alle möglichen Werte erfüllen also die Bedingung $(a - c) \in \{-7, 0, 7\}$.

B Team, Aufgabe 3, 2015, Lösung

Es gilt

$$\overline{abccba} = 100001a + 10010b + 1100c$$
$$= 7(14286a + 1430b + 157c) - (a - c).$$

Eine solche Zahl ist genau dann durch 7 teilbar, wenn $(a - c)$ durch 7 teilbar ist.
$a \neq 0$ und c sind Ziffern, und es gilt somit $-8 \leq a - c \leq 9$. Alle möglichen Werte erfüllen also die Bedingung $(a - c) \in \{-7, 0, 7\}$.
Für $a - c = -7$ erhalten wir $(a, c) \in \{(1, 8), (2, 9)\}$,
für $a - c = 0$ erhalten wir $(a, c) \in \{(1, 1), (2, 2), \ldots, (9, 9)\}$
und schließlich für $a - c = 7$ erhalten wir
$(a, c) \in \{(7, 0), (8, 1), (9, 2)\}$, und somit 14 Möglichkeiten für das geordenete Paar (a, c).

Es gilt

$$\overline{abccba} = 100001a + 10010b + 1100c$$

$$= 7(14286a + 1430b + 157c) - (a - c).$$

Eine solche Zahl ist genau dann durch 7 teilbar, wenn $(a - c)$ durch 7 teilbar ist.
$a \neq 0$ und c sind Ziffern, und es gilt somit $-8 \leq a - c \leq 9$. Alle möglichen Werte erfüllen also die Bedingung $(a - c) \in \{-7, 0, 7\}$.
Für $a - c = -7$ erhalten wir $(a, c) \in \{(1, 8), (2, 9)\}$,
für $a - c = 0$ erhalten wir $(a, c) \in \{(1, 1), (2, 2), \dots, (9, 9)\}$
und schließlich für $a - c = 7$ erhalten wir
$(a, c) \in \{(7, 0), (8, 1), (9, 2)\}$, und somit 14 Möglichkeiten für das geordenete Paar (a, c).
In allen Fällen ist b ein beliebige Ziffer, und es existieren somit insgesamt $14 \cdot 10 = 140$ sechsziffrige, durch sieben teilbare Palindromzahlen. $\square$

Zwei positive ganze Zahlen heißen *Freunde*, wenn beide gleich viele Ziffern haben, in einer die Ziffern in steigender Reihenfolge stehen und in der anderen in fallender Reihenfolge, und ferner die beiden Zahlen keine gemeinsame Ziffer besitzen. So sind, z.B. die beiden Zahlen 147 und 952 Freunde.

Löse die folgenden Aufgaben:

a) Bestimme die Anzahl aller zweiziffrigen Zahlen, die einen Freund haben.

b) Bestimme die größte Zahl, die einen Freund hat.

(*Robert Geretschläger*)

a) Jede zweiziffrige Zahl n, die aus zwei verschiedenen Ziffern besteht, hat ihre Ziffern entweder in steigender oder fallender Reihenfolge. Es existieren sicher zwei von 0 verschiedene Ziffern a und b, die sich von den Ziffern von n unterscheiden. Es folgt, dass entweder $\overline{ab}$ oder $\overline{ba}$ ein Freund von n ist.

a) Jede zweiziffrige Zahl n, die aus zwei verschiedenen Ziffern besteht, hat ihre Ziffern entweder in steigender oder fallender Reihenfolge. Es existieren sicher zwei von 0 verschiedene Ziffern a und b, die sich von den Ziffern von n unterscheiden. Es folgt, dass entweder $\overline{ab}$ oder $\overline{ba}$ ein Freund von n ist.
Die Anzahl zweiziffriger Zahlen mit einem Freund ist somit gleich der Anzahl zweiziffriger Zahlen mit verschiedenen Ziffern. Es gibt insgesamt 90 zweiziffrige Zahlen (von 10 bis 99). Unter diesen bestehen 9 $(11, 22, \ldots, 99)$ aus zwei gleichen Ziffern Es gibt somit insgesamt $90 - 9 = 81$ zweiziffrige Zahlen, die einen Freund haben.
$\square$

b) Hat die gesuchte Zahl k Ziffern, so hat ihr Freund ebenfalls k Ziffern. Zusammen haben sie also $2k$ verschiedene Ziffern. Da es nur 10 Ziffern gibt, hat die gesuchte größte Zahl höchstens 5 Ziffern.

b) Hat die gesuchte Zahl k Ziffern, so hat ihr Freund ebenfalls k Ziffern. Zusammen haben sie also $2k$ verschiedene Ziffern. Da es nur 10 Ziffern gibt, hat die gesuchte größte Zahl höchstens 5 Ziffern.
Da keine Zahl mit 0 beginnt, muss die Ziffer 0 in der Zahl mit den Ziffern in fallender Reihenfolge enthalten sein wenn $k = 5$ gilt.
Weiters wissen wir: Hat eine Zahl n mit Ziffern in steigender Reihenfolge einen Freund, so hat ihr Spiegelbild (also die Zahl mit den gleichen Ziffern in umgekehrter Reihenfolge) ebenfalls einen Freund, nämlich das Spiegelbild vom Freund von n. (Dabei muss man die letzte Ziffer 0 passend tauschen.)

b) Hat die gesuchte Zahl k Ziffern, so hat ihr Freund ebenfalls k Ziffern. Zusammen haben sie also $2k$ verschiedene Ziffern. Da es nur 10 Ziffern gibt, hat die gesuchte größte Zahl höchstens 5 Ziffern.
Da keine Zahl mit 0 beginnt, muss die Ziffer 0 in der Zahl mit den Ziffern in fallender Reihenfolge enthalten sein wenn $k = 5$ gilt.
Weiters wissen wir: Hat eine Zahl n mit Ziffern in steigender Reihenfolge einen Freund, so hat ihr Spiegelbild (also die Zahl mit den gleichen Ziffern in umgekehrter Reihenfolge) ebenfalls einen Freund, nämlich das Spiegelbild vom Freund von n. (Dabei muss man die letzte Ziffer 0 passend tauschen.)
Die größte Zahl mit einem Freund hat somit die Ziffern in fallender Reihenfolge, höchstens 5 Ziffern, und enthält die Ziffer 0. Diese größte Zahl ist somit 98760 und ihr Freund ist 12345. $\square$

Eine *Wellenzahl* ist eine Zahl, in der die Ziffern abwechselnd größer und kleiner (oder kleiner und größer) werden, wenn sie von links nach rechts gelesen werden. (So sind z.B. 3629263 und 84759 Wellenzahlen, aber 45632 nicht.)

a) Zwei fünfziffrige Wellenzahlen m und n sind aus allen Ziffern von 0 bis 9 zusammengesetzt. (Die erste Ziffer einer Zahl darf nicht 0 sein.) Bestimme den kleinstmöglichen Wert von $m + n$.

b) Bestimme die größtmögliche Wellenzahl, in der keine Ziffer zweimal vorkommt.

c) Bestimme eine fünfziffrige Wellenzahl, die in der Form $ab + c$ geschrieben werden kann, wobei a, b und c jeweils dreiziffrige Wellenzahlen sind.

(*Robert Geretschläger*)

a) Die kleinste Summe dieser Art ist

$$20659 + 14387 = 35046.$$

C Team, Aufgabe 3, 2015, Lösung

a) Die kleinste Summe dieser Art ist

$$20659 + 14387 = 35046.$$

b) Die größte solche Zahl ist 9785634120.

C Team, Aufgabe 3, 2015, Lösung

a) Die kleinste Summe dieser Art ist

$$20659 + 14387 = 35046.$$

b) Die größte solche Zahl ist 9785634120.

c) Es gibt viele derartige Kombinationen. Beispiele sind

$$120 \cdot 142 + 231 = 17271 \quad \text{oder} \quad 101 \cdot 101 + 101 = 10302.$$

$\square$

Danke für die Aufmerksamkeit!

Duell Website: http://www.mathematicalduel.eu/

Danke für die Aufmerksamkeit!

Duell Website: http://www.mathematicalduel.eu/

Kontakt: robert.geretschlaeger@brgkepler.at

Danke für die Aufmerksamkeit!

Duell Website: http://www.mathematicalduel.eu/

Kontakt: robert.geretschlaeger@brgkepler.at

meine Website: http://geretschlaeger.brgkepler.at